Commentaires sur les épreuves de Mathématiques

Épreuve ÉCRITE de MATHÉMATIQUES "A"

Concours	Nb cand.	**Moyenne**	**Ecart type**	**Note la plus basse**	**Note la plus haute**
A BIO	2731	10,42	4,06	1,0	20,0
A ENV	1690	10,56	4,12	1,0	20,0
A PC BIO	752	10,71	4,07	1,5	20,0

Introduction

Le sujet de l'épreuve A de mathématiques a un peu évolué cette année. Au lieu de proposer 2 problèmes indépendants, les candidats n'en avaient qu'un à traiter qui se composait de 3 parties. Les deux premières parties étaient totalement indépendantes, l'une portant sur le programme d'analyse, l'autre sur le programme d'algèbre ce qui permettait à l'ensemble des candidats de s'exprimer sur une bonne partie du programme des 2 années de BCPST. La troisième partie s'inspirait surtout de la partie 2, mais on faisait appel à certains résultats de la partie 1.

Cette épreuve tranchait avec le classicisme affiché des dernières années. Cela a eu le mérite de la rendre intéressante en elle-même mais plutôt délicate pour les étudiants.

De très bonnes connaissances de base étaient nécessaires, personne ne s’en plaindra. Mais il fallait aussi faire preuve de virtuosité sur des calculs à la technique inhabituelle pour des élèves de BCPST, gestion d’un grand nombre de paramètres ....

Il faut reconnaître que bien peu de candidats y sont parvenus, l'immense majorité a buté sur les difficultés techniques rencontrées. Le jury a dû, pour étaler ses notes, faire preuve d'un peu plus de magnanimité que d'habitude et a souvent récompensé un début d'idée intéressante ou une intuition bien sentie.

PARTIE 1

Généralités

La partie 1, consacrée à l'analyse, consistait en l'étude de 3 fonctions implicites définies par des réciproques de la fonction F donnée par l'énoncé. Il fallait déjà bien maîtriser le théorème de la bijection, ce qui n'est hélas pas encore le cas de tous. La grosse difficulté était que cette fonction F réalisait 4 bijections sur 4 intervalles différents, générant ainsi 4 bijections réciproques, ce qui permettait de définir les 3 fonctions implicites. On pouvait alors étudier ces dernières en utilisant les propriétés des fonctions réciproques.

Les candidats qui ont réussi à bien définir les fonctions implicites sont très peu.

La différence s'est donc faite sur les quelques questions où l'on pouvait se passer de cette définition, ou bien sur certains points où l'intuition et la bonne lecture du tableau de variations de F pouvaient faire deviner les résultats.

Détails

La première question est abordée par l'ensemble des candidats et généralement bien traitée, même si l'on peut déplorer la décroissance de *F* sur son domaine au lieu du découpage sur les 4 intervalles. Trop de candidats (>25%) omettent la continuité de *F* dans le théorème de la bijection. Les graphes sont souvent faits, pas toujours très soignés, les correcteurs attendaient la présence des asymptotes horizontales et verticales, et éventuellement le calcul numérique de ρ_1 et ρ_2.

La résolution de l'équation (E_t) est bien abordée, même si les candidats oublient souvent de justifier l'absence de solution sur le dernier des 4 intervalles. A noter que certains se lancent dans une équation du $3^{\text{ième}}$ degré en λ… Pour ces derniers, le problème d'analyse s'arrête en général là.

Pour la limite en 0, le jury a pris en compte les nombreux candidats qui ont su donner le résultat de manière intuitive en faisant appel au tableau de variations de *F*. Le prolongement par continuité en 0 est en général acquis par les étudiants, mais sans les réciproques, il était impossible d'avoir la continuité sur *R*.

La limite du taux d'accroissement est trouvée par les candidats qui s'y frottent (environ 50%) et le lien avec la dérivabilité en 0 est plutôt bien maîtrisé, mais beaucoup pensent à tort que cela suffit pour avoir la dérivabilité sur *R*.

Même si l'utilisation des réciproques était nécessaire pour une rédaction propre concernant les limites en l'infini, un bon tiers des candidats s'est vu récompensé par sa bonne interprétation du tableau de variations de *F*.

Les dernières questions n'ont été abordées que de manière anecdotique, et seule une poignée de candidats est parvenu à extraire le coefficient en *x* de l'asymptote ou à esquisser l'allure des graphes demandés.

PARTIE 2

Généralités

La partie 2, consacrée à l'algèbre, consistait en l'étude du rang et du spectre de 4 matrices successives. Après une mise en bouche aisée, les 3 dernières matrices définies avec 3 paramètres réels ont été le gros souci des candidats.

Les méthodes de recherche de rang, image, noyau fonctionnent bien sur une matrice à coefficients numériques, mais l'irruption des 3 paramètres a mis en défaut les techniques usuelles.

Ceux-ci ne se posent que très rarement la question des cas particuliers qui annulent des pivots et les méthodes classiques les mettent face à des systèmes inextricables.

Le principal reproche que l'on peut leur faire est le manque de recul par rapport à l'énoncé, ils tentent de répondre aux questions de manière trop classique, sans essayer de voir le lien entre les questions dont l'enchaînement est censé les aider.

Devant la difficulté de la recherche des spectres notamment, un trop grand nombre d'élèves utilisent des **résultats hors programme** (déterminant, produit mixte, polynôme annulateur, trace). Le jury déplore cet état de fait et ne met absolument aucun point sur ces questions.

Détails
Pour la matrice *B*, on attend des étudiants qu'ils donnent une base du noyau et de l'image. Cette dernière pose, comme de coutume, plus de difficultés que le noyau.

Beaucoup de difficultés pour le rang de *T*. Pour un nombre non négligeable de candidats, la cas $\vec{u}=\vec{0}$ se réduit à $\vec{u}=(0,v,w)\ldots$ La méthode du pivot est quasi-unanime, les interrogations quant aux pivots éventuellement nuls beaucoup moins ! Les divisions par *u,v,w* sans aucune précaution sont légion.

La détermination des valeurs propres a soulevé du fait des paramètres de nombreuses imprécisions :

- le cas $\vec{u}=\vec{0}$ est totalement oublié (guère passionnant, il est vrai)
- les étudiants se lançant courageusement dans un pivot pour résoudre $TV=\lambda V$ se retrouvent vite dans un abîme sans fond dont ils n'arrivent pas à ressortir.
- Abus de résultats hors programme pour trouver le spectre de *T*.

Le sous-espace propre associé à 0 est assez fréquemment abordé, parfois déterminé, même si les cas où l'un des paramètres est nul sont escamotés. Pour l'autre sous-espace, il reste malheureusement enfoui derrière des systèmes inextricables. Notons que les candidats ayant trouvé les valeurs propres par des méthodes illicites (hors programme) ne sont pas victimes de la double peine et sont récompensés s'ils parviennent à trouver les sous-espaces propres associés.
Le critère de diagonalisation est bien connu des candidats. Signalons que l'on voit encore le rapport fantaisiste inversible $\Leftrightarrow$ diagonalisable.
Et c'est reparti pour des pivots nuls lors de la recherche du rang de *V*. Notons que $\vec{u}\neq\vec{0}$ ne signifie pas $uvw\neq 0$. Certains candidats affirment que 3 vecteurs non colinéaires 2 à 2 forment une famille libre.
Trop peu d'étudiants voient le lien avec la question précédente pour montrer que 0 est valeur propre de *V*. Pour montrer que c'est la seule, une initiative bien amenée peut être récompensée même si elle n'aboutit pas. Malgré quelques résultats farfelus sur les matrices antisymétriques, la non-diagonalisabilité de *V* a souvent été montrée.
Le calcul de Ω, apparemment sans difficulté, a cependant généré son lot non négligeable d'étourderies de calcul (que d'erreurs de signe !)
Toute matrice symétrique <u>réelle</u> est diagonalisable est un théorème en général bien connu des étudiants. Attention aux résultats inventés tels que la somme de 2 matrices diagonalisables est diagonalisable. La dernière question est abordée de façon très intimiste.

La partie 3, synthèse des 2 parties, mais largement orientée sur l'algèbre linéaire n'a été que partiellement traitée. Il y avait quelques questions abordables où nombre de candidats ont tenté de s'exprimer. De nombreux écueils ont été constatés sur les techniques de produit matriciel que certains ne différencient pas du produit usuel dans R. Ainsi, on multiplie par des inverses de vecteur quand cela nous arrange, on simplifie par un produit de matrices sans se poser la question de savoir s'il est inversible (ou réel!), on affirme qu'un produit de 2 matrices non nulle est non nul...
Autant le jury a récompensé dans les deux premières parties les bonnes intentions non menées à terme, autant dans ces calculs il s'est montré beaucoup plus exigeant, considérant que l'un

des objectifs de la formation est la distinction claire des différents objets (scalaire, vecteur, matrice, application linéaire) rencontrés en algèbre linéaire.

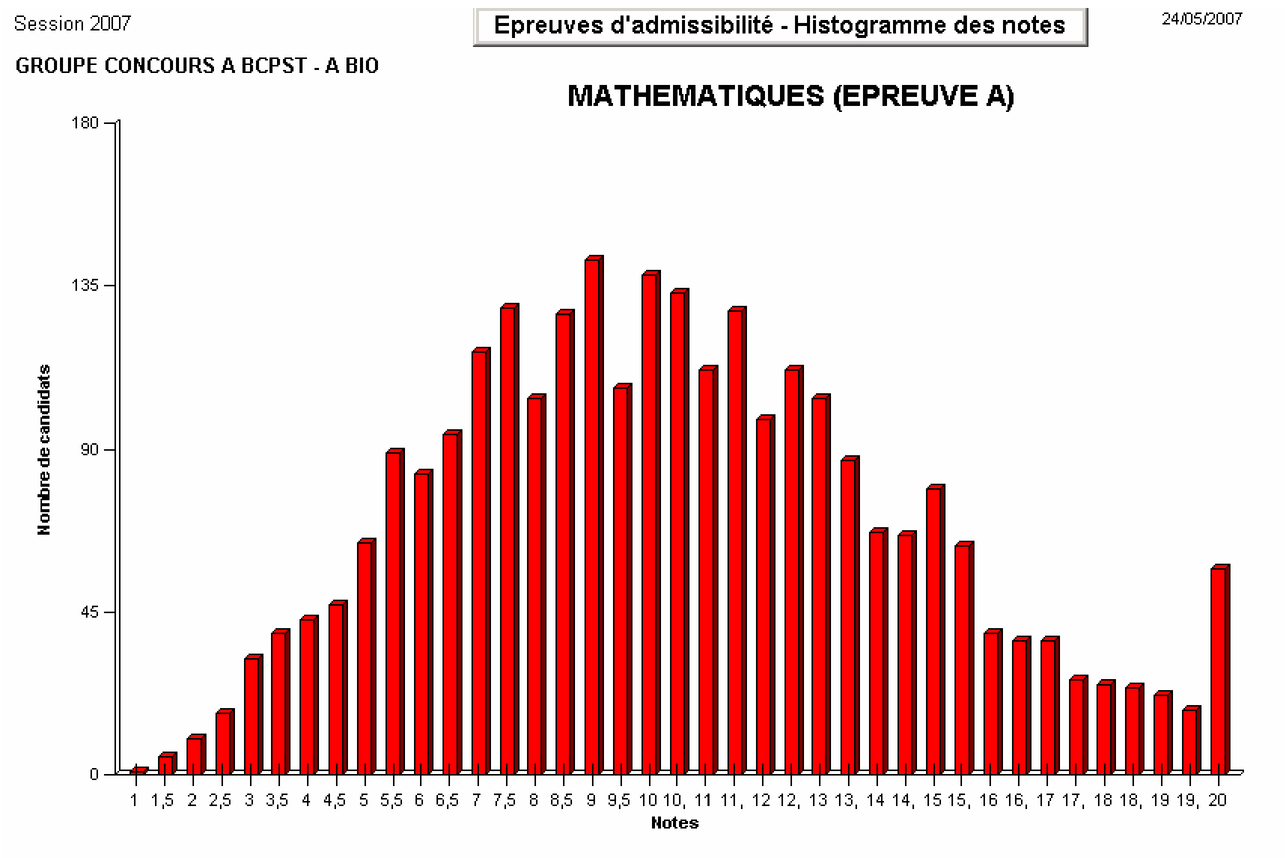
Conclusion

En conclusion, cette épreuve, bien que totalement dans le cadre du programme et orientée plutôt vers des calculs pratiques, se caractérise peut-être par sa grande originalité.

Les candidats ont sans doute été surpris par la difficulté de l'épreuve, mais leur capacité d'adaptation face à l'adversité est une qualité qui leur sera utile dans la suite de leurs études et la vie professionnelle.
Notons que l'objectif principal de cette épreuve, à savoir être sélective et de classer au mieux l'ensemble des candidats, est atteint avec un écart-type voisin de 4.

Correcteurs : Mmes et MM. Bacquelin, Foulquier, Gauthier, Goix (R), Lelong, Maserak, Mesnager, Monna, Nouvet, Perret-Gentil, Petavy, Prévost.

Expert : M. Cornillon



Épreuve ÉCRITE de MATHÉMATIQUES "B"

Concours	Nb cand.	**Moyenne**	**Ecart type**	**Note la plus basse**	**Note la plus haute**
A BIO	2731	10,21	3,81	0,5	20,0
A ENV	1690	10,34	3,86	0,5	20,0
A PC BIO	752	10,47	3,88	0,5	20,0

Le sujet comportait trois parties, les deux premières pouvant être traitées de façon indépendante. De nombreux résultats intermédiaires étaient fournis par l'énoncé, permettant ainsi aux étudiants d'avancer dans le problème. Quelques candidats ont d'ailleurs traité une grande partie du sujet.

Les correcteurs ont trouvé le sujet intéressant, gradué, bien dans l'esprit du programme et permettant d'obtenir un large éventail de notes.

Quelques remarques d'ordre général sur les copies :

<u>en probabilité</u> :
Certains candidats n'ont pas compris ce qu'est une fonction de répartition : à la question I.1.b, ils écrivent que la fonction de répartition est nulle à l'extérieur de l'intervalle [0,1], ou se refusent à la calculer à l'extérieur de [0,1].

Quelques candidats pensent que deux variables aléatoires ayant la même loi sont égales.

La caractérisation des fonctions de répartition des variables à densité est trop souvent ignorée : certains candidats rappellent les propriétés générales des fonctions de répartition (croissante, C^1 par morceaux, limites en $+\infty$ et $-\infty$.) mais ne répondent pas à la question posée.
Quelques candidats confondent encore indépendance et incompatibilité.
On trouve dans quelques copies des densités négatives, des fonctions de répartition négatives.
Parmi les candidats ayant abordé la partie III, certains estiment que les variables aléatoires Y_1 et Y_n sont indépendantes.

<u>en analyse</u> :
La notion de fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ n'est pas toujours bien assimilée.
La convergence des intégrales impropres est rarement traitée ; lorsqu'elle est traitée les théorèmes de convergence sont cités de façon incomplète ou fausse. Les intégrations par parties sont utilisées en oubliant de dire que les fonctions sont de classe C^1.

Par ailleurs, l'écriture mathématique fait parfois défaut : des relations sont données sans précision de domaine, les éléments dx manquent aux intégrales …

L'orthographe est déplorable dans quelques copies, négligée dans beaucoup.

A l'unanimité, les correcteurs déplorent la malhonnêteté dont font preuve certains candidats dans les calculs un peu délicats dont l'énoncé fournit la réponse (essentiellement la question II.2.d) : des erreurs disparaissent en fin de calcul ; des invocations magiques du type « par télescopage des termes » ou « grâce à la formule de binôme de Newton » remplacent des calculs non faits ou faux.

Analyse par question

Partie I. La plus abordée. Traitée parfois avec beaucoup de longueur.

I.1.b : En plus des erreurs déjà mentionnées sur la fonction de répartition, des candidats affirment que F_n est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.
I.2.a : Le début de la question n'est pas traité dans un nombre non négligeable de copies. Quelques candidats donnent des relations fausses, en particulier $V(Y_n)=-V(Y_1)$ ce qui donne une variance négative à la question I.2.c !!
I.2.b et c : Quelques candidats se lancent dans de longues justifications d'absolue convergence pour l'existence de l'espérance et de la variance ; d'autres font une intégration par parties pour les calculer.
I.3.a : La justification de l'indépendance des variables U_i est trop souvent omise.
I.4.a : La première partie de la question est rarement abordée. Les relations entre les espérances et les variances de Y_k et Y_{n-k+1} sont rarement justifiées. Dans certaines copies, les candidats posent $y=1-x$ sans plus de précision.
I.4.b : La première partie de la question est rarement traitée.

Partie II. Abordée dans la plupart des copies

II.1.c : Quelques candidats trouvent une loi exponentielle de paramètre 1 voire de paramètre négatif -n. L'espérance et la variance ne sont pas toujours sues.
II.2.a : Parmi les fautes fréquentes : omission de la continuité sur $\mathbf{R}_+$; omission de la positivité sur $\mathbf{R}_+$; la limite en $+\infty$ de la fonction est nulle, donc l'intégrale converge ; mauvaise majoration, quand ce n'est pas une minoration.
II.2.b : Quelques candidats font des erreurs de calculs qui s' « arrangent » à la fin.
II.2.d : Cette question est rarement bien traitée. Dans le meilleur des cas les candidats reconnaissent qu'ils ne trouvent pas le résultat, mais hélas certains n'hésitent pas à cumuler les erreurs pour obtenir le résultat demandé.
II.3.a : Quelques candidats pensent qu'il y a une erreur d'énoncé.

Partie III. Peu abordée.

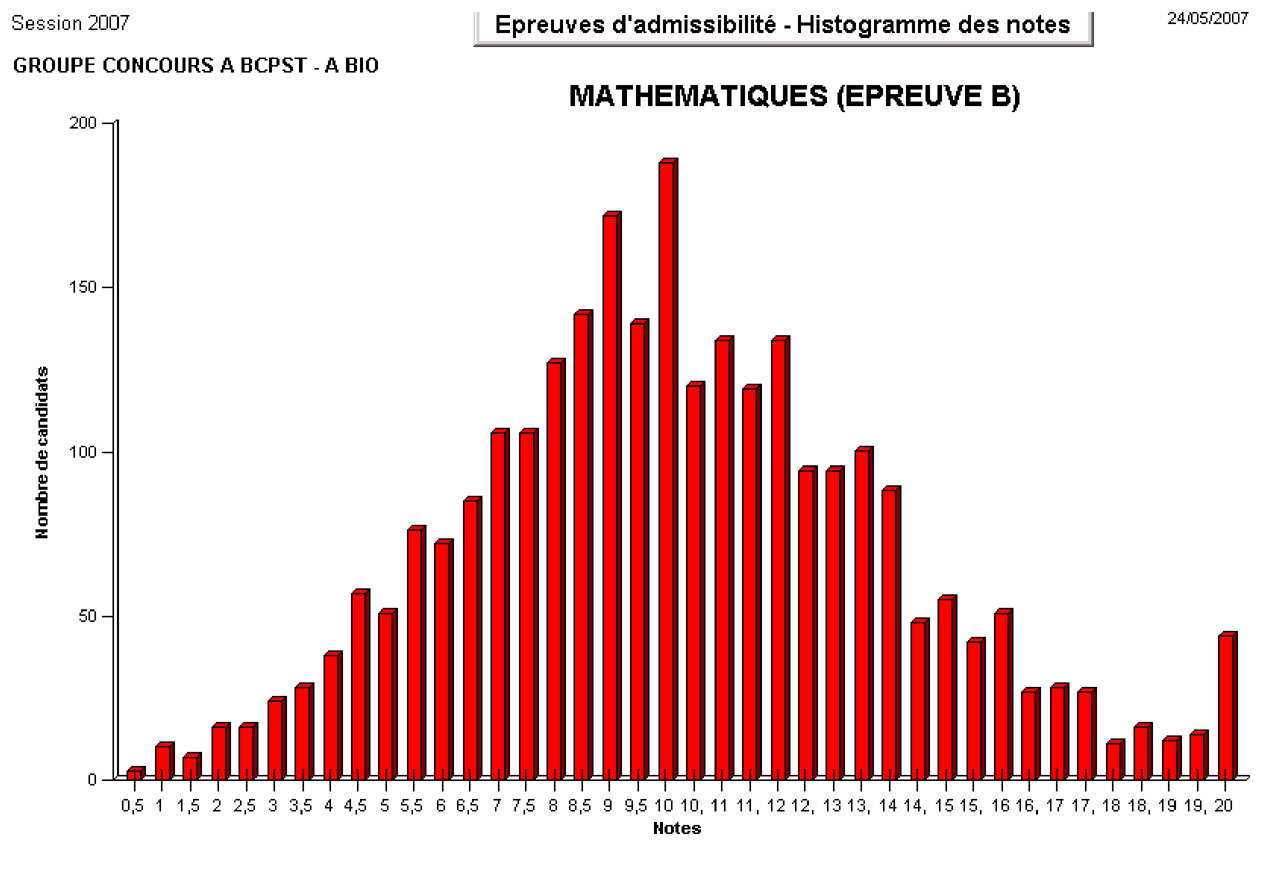
III.2.a : Parmi les candidats ayant traité cette question, outre ceux qui pensent que les variables Y_1 et Y_n sont indépendantes, certains pensent que l'événement $([Y_1\leq y] \cap [Y_n\leq x])$ est le complémentaire de $([Y_1>y] \cap [Y_n\leq x])$.
III.3 Quelques candidats traitent cette question.

Conclusion

On peut toujours rappeler aux candidats qu'il est préférable de bien lire une question : cela peut éviter de donner de longs développements sans rapport avec la question.
Lorsqu'un calcul ne donne pas le résultat attendu par l'énoncé, le candidat a toujours intérêt à « jouer » l'honnêteté !!!

Correcteurs : Mmes et MM. Boschat, D'angelo Lods, Husson (R), Ladauge, Lalaude-Labayle, Lepeltier, Mallet, Matoussi, Mesnager, Piccinini, Rigal, Vuillard.

Expert : M. Cornillon



Épreuve ORALE de MATHÉMATIQUES

Concours	Nb cand.	Moyenne	Ecart type	Note la plus basse	Note la plus haute
A BIO	2081	10,05	4,08	1,0	20,0
A ENV	861	11,19	3,93	2,0	20,0
A PC BIO	456	11,0	3,86	2,5	20,0

IMPRESSIONS GENERALES

L'objectif de l'épreuve orale de mathématiques est d'évaluer chaque candidat sur un large éventail des notions importantes qui lui sont enseignées durant les deux années de classes préparatoires. Dans cet objectif chaque sujet est composé de deux exercices : l'un de probabilité, l'autre soit d'analyse, soit d'algèbre linéaire, soit de géométrie.

Le candidat dispose d'une demi-heure pour préparer une solution des deux sujets qui lui sont proposés, et d'un temps égal pour présenter son travail : le jury ne s'attend pas à ce le candidat ait résolu complètement les deux exercices lors de sa préparation, et de plus ne se contente pas d'une simple prestation, en effet le jury est libre de demander des éclaircissements et des justifications sur les points exposés, il peut aussi poser des questions « d'ouverture », ce qui n'est pas pénalisant pour le candidat, bien au contraire : l'oral est un dialogue, et le candidat ne doit pas être déstabilisé lorsque le jury lui pose des questions destinées à l'aider à prendre des initiatives.

Trop de candidats perdent du temps pendant la demi-heure de préparation à recopier les textes de leurs exercices. Dans quel but ? Les oraux sont publics et le jury rappelle qu'il communique, chaque année, aux professeurs et aux élèves des exemples de couplages.

IMPRESSIONS MATHEMATIQUES

1°) Probabilité

Les notions de fonction de répartition et de densité sont mieux maîtrisées ; cependant les univers images ne sont pas toujours décrits, et l'utilisation de la « formule » de convolution est souvent un exercice périlleux.

Trop de candidats reconnaissant une loi classique du cours affirment le résultat, sans aucune argumentation. Il est très difficile d'obtenir alors un raisonnement.

2°) Analyse

Les théorèmes classiques d'analyse ne sont pas toujours connus et obtenir un énoncé correct des théorèmes utilisés est une opération délicate; il n'est pas rare d'entendre « vous voulez

aussi les hypothèses ? » oui, le jury désire les hypothèses et les conclusions des théorèmes énoncés en toute généralité.
Manque de rigueur dans l'utilisation des notions d'intégrales et de primitives : ainsi on entend souvent :
« Si g(x)= $\int_0^x f(t)dt$ alors g est une intégrale de f donc g est dérivable ».
Et dans ces conditions, bien sûr, les fonctions définies par des intégrales posent souvent problème, par exemple les fonctions de la forme : $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$.
L'utilisation des développements limités pour la recherche d'équivalents est malhabile.
La connaissance des résultats concernant les suites géométriques est très superficielle (limite, somme d'un nombre fini de termes, somme de la série géométrique…)

3°) Algébre linéaire

Là aussi, le cours est connu de façon superficielle, le vocabulaire n'est pas maîtrisé ;
Toujours les mêmes confusions sur du vocabulaire élémentaire : rang, ordre, dimension.
C'est la méthode du rang qui est le plus souvent utilisée pour la recherche des valeurs propres, mais sans bien maîtriser cette notion, ainsi par exemple, si il est demandé de vérifier qu'un réel donné *a* est valeur propre, le candidat cherche toutes les valeurs propres puis regarde si *a* est parmi les valeurs propres, l'efficacité est négligée, la logique est souvent malmenée.
De même, il n'est pas utile d'appliquer la méthode de Gauss à une matrice triangulaire pour déterminer ses valeurs propres…
Beaucoup trop de candidats ne savent pas « lire » des résultats élémentaires sur des matrices et par exemple ne voient pas que 2 est valeur propre de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \\ 9 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ou bien ne donnent pas spontanément un vecteur non nul du noyau d'une matrice ayant une colonne nulle, ou bien d'une matrice dont ils connaissent une combinaison linéaire non triviale entre les colonnes.

4°) Géométrie

Trop de lacunes encore : par exemple, le produit vectoriel de deux vecteurs est …un scalaire et parfois le produit scalaire a trois composantes.
Graves encore sont les lacunes sur les résultats de géométrie de la classe de première année, mais les connaissances du lycée sont encore plus lointaines.

5°) Le programme de première année

Il semble souvent trop lointain, surtout les chapitres des suites récurrentes et celui des complexes…
La définition d'une racine d'ordre k d'un polynôme n'est pas connue (au mieux la caractérisation à l'aide des polynômes dérivés est connue, mais avec des erreurs sur le nombre de polynômes à tester).

Conclusion

Cette année le jury a rencontré très peu de candidats très faibles ceux-ci semblent avoir retenu un certain nombre de méthodes ; malheureusement l'argumentation est souvent négligée. Par exemple à une question du type « cette matrice est-elle diagonalisable ?» il est fréquent d'avoir pour réponse définitive, « pour moi elle le serait ». On peut craindre que la culture mathématique de beaucoup de candidats, indispensable à un futur ingénieur, se réduise à un petit catalogue et qu'elle disparaisse assez rapidement. Les difficultés relatives ne remettent pas en cause la qualité de la formation.

Examinateurs : Mmes & MM. Bouissou, Brochier, Fargier, Girard, Morel, Nouvet, Perrin, Pillons, Raynaud, Vuillard.

Expert et rapporteur : Mme Perrin