**MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE,
DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**

Direction des personnels enseignants

CAPES EXTERNE & CAFEP-CAPES
DE MATHÉMATIQUES

Rapport de Monsieur Jean MOUSSA
Inspecteur Général de l'Éducation Nationale
Président du Jury

2004
CENTRE NATIONAL DE DOCUMENTATION PEDAGOGIQUE

CONSEILS PRATIQUES AUX FUTURS CANDIDATS

Il est recommandé aux futurs candidats de s'informer à l'avance sur les modalités des concours de recrutement en général et sur celles particulières au CAPES externe et au CAFEP-CAPES de mathématiques.

Les renseignements généraux (les conditions d'accès ; la préparation ; le déroulement du concours ; la carrière dans l'enseignement secondaire) se trouvent réunis dans la brochure « enseigner dans les collèges et les lycées » diffusée par le ministère de l'éducation nationale. (D.P.E., 34 rue de Châteaudun, 75009 Paris). On peut se procurer cette brochure directement au ministère ou auprès des services communs universitaires d'information et d'orientation.

Les renseignements spécifiques (programmes ; nature des épreuves) sont publiés dans le bulletin officiel de l'éducation nationale, publication qui informe les enseignants : carrière, programmes, nominations, vacances de postes, concours, etc. Ces renseignements se trouvent également, pour l'essentiel, dans le rapport du concours.

Le jury, pour faciliter la recherche d'information émanant des candidats et des formateurs, a en outre créé un site à l'adresse

www.capes.math.jussieu.fr

sur lequel il a réuni l'ensemble des informations utiles à la préparation au concours. Les informations figurant sur ce site n'ont pas valeur légale ; seules les informations délivrées directement par la DPE et par le Ministère ont valeur officielle.

« LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ETABLIS SOUS LA RESPONSABILITE DES PRESIDENTS DE JURY »

SOMMAIRE

I. PRESENTATION DU CONCOURS 2004

1. Composition du jury.

Par arrêté en date du 18 février 2004, la composition du jury est la suivante:

	NOM	PRENOM	FONCTION	ACAD
M.	ACX	Olivier	Professeur de Chaire Supérieure	PARIS
M.	AEBISCHER	Bruno	Professeur Agrégé	BESANCON
Mme	AEBISCHER	Anne-Marie	Professeur Agrégé	BESANCON
M.	ALESSANDRONI	Philippe	IA-IPR	NANCY METZ
Mme	AMIOT	Martine	IA-IPR	CRETEIL
M.	ANDRIEUX	Jean-Claude	Professeur Agrégé	DIJON
M.	AUBRY	Pierre-Jean	Professeur Agrégé	CRETEIL
Mme	AUDOUIN	Marie-Claude	IA-IPR	VERSAILLES
Mme	AYAX	Sylvie	Professeur Agrégé	VERSAILLES
M.	AYMES	Jean	IA-IPR	TOULOUSE
M.	BADRA	Abdallah	Maître de conférences	CLERMONT FERRAND
M.	BALZER	Paul	Professeur Agrégé	STRASBOURG
M.	BARBOLOSI	Dominique	Maître de Conférences	AIX MARSEILLE
M.	BELLEBOUCHE	Daniel	Professeur Agrégé	AMIENS
M.	BELLY	Daniel	Professeur Agrégé	AIX MARSEILLE
M.	BELTRAMONE	Jean Paul	IA-IPR	CRETEIL
M.	BERGERON	Axel	Professeur Agrégé	NANTES
Mme	BERTRAND-MATHIS	Anne	Professeur des Universités	POITIERS
Mme	BLAU	Danielle	IA-IPR	TOULOUSE
M.	BLOUZA	Adel	Maître de Conférences	ROUEN
M.	BODY	Bernard	Professeur Agrégé	GRENOBLE
M.	BOGAERT	Yves	Professeur Agrégé	PARIS
Mme	BONNEFONT	Claire	Professeur Agrégé	CRETEIL
Mme	BORNAZ-VERT	Eliane	Professeur Agrégé	PARIS
M.	BOUCHER	François	Professeur de Chaire Supérieure	TOULOUSE
M.	BOUSCASSE	Jean-Marie	Professeur Agrégé	BORDEAUX
Mme	BRAMOULLE	Laurence	Professeur Agrégé	POITIERS
Mme	BRISSET	Anne Marie	Professeur Agrégée	PARIS
M.	BRUCKER	Christian	Professeur Agrégé	STRASBOURG
Mme	BRUYANT	Francine	Maître de Conférences	REIMS
M.	CANET	Jean François	IA-IPR	MONTPELLIER
M.	CARRON	Christophe	Professeur Agrégé	BORDEAUX
M.	CESARO	Joseph	IA-IPR	NICE
Mme	CHASSAING-KOWALSKA	Anna	Professeur Agrégé	NANCY METZ
Mme	CHOQUER RAOULT	Agnès	Professeur Agrégé	VERSAILLES
Mme	CLAVEL	Sylvaine	Professeur Agrégé	VERSAILLES
M.	CORI	René	Maître de Conférences	PARIS
M.	COUCHOURON	Jean-François	Maître de Conférences	NANCY METZ
Mme	DECHEZLEPRETRE	Nathalie	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	DIAGNE	Malick	Professeur Agrégé	ORLEANS TOURS
M.	DOGBE	Christian	Maître de conférences	CAEN
M.	DOYEN	Jacques	Maître de Conférences	GRENOBLE
M.	DUGARDIN	Thierry	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	DULON	Laurent	Professeur Agrégé	BORDEAUX

M.	DUMAS	Laurent	Maître de Conférences	PARIS
Mme	DUPONCHEL	Domitille	IA-IPR	LILLE
Mme	ERNOULT	Monique	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	ESCOFFIER	Jérôme	Professeur Agrégé	GRENOBLE
M.	FERRAND	Patrick	IA-IPR	LYON
M.	FERRARD	Jean Michel	Professeur de Chaire Supérieure	LYON
Mme	FLEURY-BARKA	Odile	Maître de Conférences	REIMS
Mme	FONTANEZ	Françoise	Professeur Agrégé	PARIS
Mme	GAUTHERON	Véronique	Maître de Conférences	PARIS
M.	GEOFFRIAU	François	Maître de Conférences	POITIERS
Mme	GERBERT-GAILLARD	Evelyne	Professeur Agrégé	GRENOBLE
M.	GIRAULT	Dominique	Professeur Agrégé	POITIERS
M.	GROISON	Jean Marc	Professeur Agrégé	LYON
M.	GUYONVARCH	Bertrand	Professeur Agrégé	RENNES
M.	HANS	Jean-Luc	Professeur de Chaire Supérieure	BESANCON
M.	HARINGTON	Bruno	Professeur agrégé	MONTPELLIER
M.	HARTMANN	Andreas	Maître de conférences	BORDEAUX
M.	HASSAN	Azzam	Professeur Agrégé	GRENOBLE
Mme	HENROT	Isabelle	Professeur Agrégé	NANCY METZ
M.	HEROULT	François	Professeur Agrégé	PARIS
M.	HERVE	Loïc	Maître de Conférences	RENNES
Mme	JACOB	Chantal	IA-IPR	PARIS
M.	JEDDI	Ahmed	Maître de conférences	NANCY METZ
Mme	KERVADEC	Elisabeth	Professeur Agrégé	RENNES
M.	KHELIF	Anatole	Maître de conférences	PARIS
M.	LABROSSE	Jean	Professeur Agrégé	LYON
Mme	LAGUILLIER	Marie Thérèse	Professeur Agrégé	VERSAILLES
M.	LAPOLE	René	Professeur Agrégé	AMIENS
Mme	LAPOLE	Isabelle	Professeur Agrégé	AMIENS
M.	LASSALLE	Olivier	IA-IPR	LILLE
M.	LE BARS	Michel	Professeur Agrégé	PARIS
M.	LE BIGOT	Jean-Luc	Professeur Agrégé	NANTES
Mme	LE GOFF	Claire	Professeur Agrégé	PARIS
M.	LEBLANC	Jean	Professeur Agrégé	TOULOUSE
M.	LEGROS	Stéphane	Professeur de chaire supérieure	ROUEN
M.	LEHMAN	Eric	Professeur des Universités	CAEN
M.	LEMAIRE	Bernard	Professeur Agrégé	LILLE
M.	LETERRIER	Pierre	Professeur Agrégé	VERSAILLES
Mme	LETHIELLEUX	Claire	Professeur Agrégé	PARIS
Mme	LEWILLION	Martine	IA-IPR	MONTPELLIER
M.	LUCAS	Edouard	Professeur Agrégé	PARIS
M.	MALKI	Saber	Professeur Agrégé	NANCY METZ
Mme	MARBEAU	Jocelyne	Professeur Agrégé	PARIS
M.	MARGIRIER	Jean-Paul	Professeur Agrégé	LYON
M.	MARTEAU	Jean Luc	IA-IPR	LILLE
M.	MENEVIS	Hervé	Professeur Agrégé	PARIS
M.	MERCKHOFFER	René	IA-IPR	VERSAILLES
M.	MERIL	Alex	Professeur des Universités	GUADELOUPE
Mme	MEURISSE	Anne	Professeur Agrégé	LILLE
M.	MICHALAK	Pierre	IA-IPR	VERSAILLES
Mme	MILIN	Sylvie	Professeur Agrégé	VERSAILLES
M.	MOHAN	Shalay	Professeur Agrégé	PARIS
M.	MORIN	François	Professeur Agrégé	ORLEANS TOURS
Mme	MOURGUES	Marie-Hélène	Maître de Conférences	CRETEIL
M.	MOURRET	Bernard	Professeur agrégé	MONTPELLIER
Mme	MOUSSA	Anne	Professeur Agrégée	PARIS
M.	MOUSSA	Jean	IGEN	PARIS
Mme	MUHLRAD-GREIF	Catherine	Maître de Conférences	PARIS
Mme	NOGUES	Maryse	Professeur Agrégé	MONTPELLIER
Mme	NOUVET	Michèle	Professeur Agrégé	CAEN
M.	PAINTANDRE	Stéphan	Professeur Agrégé	TOULOUSE
M.	PARISE	Laurent	Professeur Agrégé	NANCY METZ
Mme	PASSAT	Isabelle	Professeur Agrégé	VERSAILLES

Mme	PAWLOWSKI	Françoise	Professeur Agrégé	BORDEAUX
Mme	PERUCCA	Jannine	Professeur Agrégé	PARIS
M.	PIEDNOIR	Jean Louis	IGEN	PARIS
M.	PIRIOU	Laurent	Maître de Conférences	NANTES
Mme	PLANCHE	Nathalie	Professeur Agrégé	CLERMONT FERRAND
M.	PLANET	Jean-Luc	Professeur Agrégé	TOULOUSE
M.	PUYOU	Jacques	Professeur Agrégé	BORDEAUX
M.	QUAREZ	Ronan	Maître de conférences	RENNES
M.	QUIBEL	Yann	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	QUIBLIER	Philippe	Professeur de Chaire Supérieure	GRENOBLE
M.	RANDRIAMIHAMISON	Louis	Maître de Conférences	TOULOUSE
Mme	RASKINE	Anne	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	REVILLON	Georges	IA-IPR	LYON
M.	ROMBALDI	Jean Etienne	Professeur Agrégé	AIX MARSEILLE
M.	RUPPRECHT	David	Professeur Agrégé	NANCY METZ
M.	SALLAZ	Alain	Maître de Conférences	GRENOBLE
M.	SDIKA	Luc	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	SEIGNOURET	Jean-Louis	Professeur Agrégé	VERSAILLES
M.	SIGWARD	Eric	IA-IPR	LILLE
Mme	TANOH	Hélène	Professeur Agrégé	STRASBOURG
M.	TENTI	Marc	Professeur Agrégé	CRETEIL
M.	THABARET	Jean Paul	IA-IPR	GRENOBLE
Mme	TRAD	Marie-Anne	Professeur de Chaire Supérieure	PARIS
M.	VAN DER OORD	Eric	IGEN	PARIS
M.	VEERAVALLI	Alain	Maître de Conférences	CRETEIL
M.	VIAL	Jean-Pierre	Professeur de Chaire Supérieure	PARIS
Mme	VILLE	Françoise	Maître de Conférences	PARIS
M.	WERQUIN	Philippe	Professeur Agrégé	VERSAILLES
Mme	WIRTH	Martine	Professeur de Chaire Supérieure	PARIS

2. Programme du concours

Le programme des sessions antérieures a été reconduit sans modification. Le texte en vigueur est donc celui paru au B.O. n°8 spécial du 24 mai 2001.

EPREUVES ECRITES

Le programme est formé des titres A et B de l'annexe I

EPREUVES ORALES

Épreuve d'exposé
Le programme est formé du titre A augmenté des paragraphes suivants du titre B de l'annexe I :

1.I. « Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique. »
1.II. « Ensembles, relations, applications. »
1.III. « Rudiments de cardinalité. »
2.I.3. « Structures des ensembles de nombres. »
2.III.5. « Calcul matriciel », alinéa b).
2.V.2. « Configurations », alinéas a) et c).
2.V.3. « Transformations ».
2.V.4. « Emploi des nombres complexes en géométrie », alinéas a), c) et d).
3.I.1. « Suites de nombres réels et de nombres complexes », alinéas a), b), d) et e).
3.I.2. « Fonctions d'une variable réelle ».
3.II.2. « Dérivation », dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
3.II.3. « Intégration sur un intervalle compact », dans ce même cas.
3.II.4. « Étude locale de fonctions », alinéa a).
3.IV.2. « Équations linéaires scalaires », alinéa b).
4.2. « Variables aléatoires », alinéas a) et c).

Épreuve sur dossier
Le programme est formé du titre A de l'annexe I.

UTILISATION DES CALCULATRICES
Circulaire du 16 Novembre 1999 n° 99-186 parue au BOEN n° 42 du 25 Novembre 1999.

ANNEXE I

A. Programmes de l'enseignement secondaire

1. La réunion des programmes de mathématiques des collèges et des lycées d'enseignement général et technologique en vigueur au 1er janvier de l'année du concours et de ceux en vigueur au 1er janvier de l'année précédente.
2. L'utilisation des calculatrices électroniques est défini par les arrêtés du 15 Mai 1997 complétés par la circulaire n° 99-018 du 1.2.1999 parue au BOEN n°6 du 11-02-1999 ainsi que la circulaire du 16-11-1999.

Dans ce cadre, les candidats doivent se munir d'une *calculatrice scientifique programmable,* alphanumérique ou non, et graphique. Ils doivent savoir utiliser leur calculatrice dans les situations numériques et algorithmiques liées au programme. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :

- Savoir programmer une instruction d'affectation.

- Savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres.

- Savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches.

- Savoir programmer une instruction séquentielle, alternative ou itérative.

- Savoir afficher à l'écran la courbe représentative d'une fonction.

Ils doivent en outre munir leur calculatrice de programmes permettant :

- la recherche de solutions approchées d'une équation numérique à une variable,
- le calcul de valeurs approchées d'une intégrale.

B. Programme complémentaire

Comme il est indiqué dans les instructions, les problèmes et les méthodes numériques et les aspects algorithmiques et informatiques (construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leur performance, rédaction méthodique de programmes) sont largement exploités. Dans le texte du programme, ils sont représentés par le signe §.

1. NOTIONS SUR LA LOGIQUE ET LES ENSEMBLES

Aucun exposé de logique formelle n'est envisagé.

I. Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique.

Occurrences libres (ou parlantes) et occurrences liées (ou muettes) d'une variable dans une expression mathématique ; signes mutificateurs usuels ($\int \ldots\ldots d\ldots$, $\sum$, $\mapsto$, $\{ \ldots \mid \ldots\ldots \}$; $\forall$; $\exists$; etc.) ; mutifications implicites.

Calcul propositionnel : connecteurs logiques ; tables de vérité ; tautologies.

Utilisation des connecteurs et des quantificateurs dans le discours mathématique ; lien entre connecteurs logiques et opérations ou relations ensemblistes.

Pratique du raisonnement mathématique : hypothèses, conclusions, quelques figures usuelles du raisonnement (raisonnement par contraposition, par disjonction de cas, par l'absurde, utilisation d'exemples ou de contre-exemples, etc.) ; pour les énoncés sous forme d'implication, distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, entre proposition directe et proposition réciproque ; cas particuliers de la recherche de lieux géométriques, d'ensembles de solutions d'équations.

II. Ensembles, relations, applications.

Opérations ensemblistes usuelles ; produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
Relations et applications ; lois de composition internes ou externes.

Ensemble des parties d'un ensemble ; image directe ou image réciproque d'une partie par une application ; comportement des opérations d'image directe et d'image réciproque vis-à-vis des opérations ensemblistes.

Familles d'ensembles ; réunions et intersections « infinies ».

Relations d'ordre ; majorants, borne supérieure…

Ensemble IN des nombres entiers naturels. Toute partie non vide de IN admet un plus petit élément. Raisonnement par récurrence.

Relations d'équivalence ; classes d'équivalence, partition associée, ensemble quotient, compatibilité d'une loi de composition avec une relation d'équivalence (passage au quotient).

Construction de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$.

III. Rudiments de cardinalité.

Équipotence de deux ensembles ; classe des ensembles équipotents à un ensemble donné ; notion de cardinal.

Théorème de Cantor (« aucun ensemble n'est équipotent à l'ensemble de ses parties »).

Fonction caractéristique d'une partie d'un ensemble ; équipotence entre l'ensemble des parties d'un ensemble E et l'ensemble des applications de E dans {0,1}.

Ensembles finis et infinis.

Ensembles dénombrables : exemples usuels ($\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des suites finies d'entiers, l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels, l'ensemble des nombres algébriques, etc.).

Puissance du continu (cardinal de P($\mathbb{N}$) ou de $\mathbb{R}$) ; non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.

2. ALGEBRE ET GEOMETRIE

I. Nombres et structures

1. Groupes

a) Groupes, morphismes de groupes. Sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques. Ordre d'un élément ; théorème de Lagrange. Image et noyau d'un morphisme de groupes. Sous-groupes distingués, groupe quotient.
Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Éléments conjugués.

§ b) Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Cycles ; transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, en produit de transpositions. Signature d'une permutation, groupe alterné.

2. Anneaux et corps

Anneaux (unitaires), morphismes d'anneaux. Sous-anneaux.

Anneaux commutatifs, anneaux intègres ; idéaux, idéaux principaux ; anneaux quotients. Corps (commutatifs), sous-corps ; caractéristique d'un corps.

3. Structure des ensembles de nombres

a) Anneau $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs (ou rationnels). L'anneau $\mathbb{Z}$ est intègre ; divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne ; sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux ; théorème de Bezout.

§ b) Nombres premiers ; décomposition en facteurs premiers.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

c) Congruences ; anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, caractérisation des éléments inversibles.

d) Corps des rationnels, corps des réels, corps des complexes.

II. Polynômes et fractions rationnelles

Dans ce chapitre, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$

1. Polynômes à une indéterminée

§ a) Algèbre $K[X]$; degré d'un polynôme, terme dominant, polynôme unitaire.

L'anneau $K[X]$ est intègre ; divisibilité dans $K[X]$. Division euclidienne.

Les idéaux de $K[X]$ sont principaux ; théorème de Bezout.

Polynômes irréductibles ; décomposition en facteurs Irréductibles.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

b) Fonctions polynômes

Racines (ou zéros) d'un polynôme, ordre de multiplicité. Polynômes scindés.

Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes.

Équations algébriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

c) Dérivation des polynômes ; formule de Taylor.

d) Théorème de D'Alembert ; polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Fractions rationnelles à une indéterminée

a) Corps $K(X)$; forme irréductible d'une fraction rationnelle non nulle.

b) Fonctions rationnelles : pôles, zéros ; ordre d'un pôle ou d'un zéro.

c) Décomposition en éléments simples. Cas du corps $\mathbb{C}$ et du corps $\mathbb{R}$.

d) Exemples simples de problèmes d'élimination.

III. Algèbre linéaire

Dans cette partie, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$

1. Espaces vectoriels

a) Espaces vectoriels. Applications linéaires, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes. Formes linéaires. Espace vectoriel $L(E,F)$, algèbre $L(E)$, groupe linéaire $GL(E)$. Espace vectoriel produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

b) Sous-espaces vectoriels ; image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels , somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires, projecteurs.

c) Familles libres, familles génératrices, bases.

d) Étant donné une application linéaire u de E dans F et un supplémentaire E' de ker u dans E, u définit un isomorphisme de E' sur lm u.

2. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Espaces admettant une famille génératrice finie. Théorème de la base incomplète, existence de bases ; dimension. Dimension d'un sous-espace, rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires. Dimension d'une somme directe.

b) Rang d'une application linéaire ; formule du rang, caractérisation des isomorphismes.

c) Formes linéaires et hyperplans, équation d'un hyperplan.

d) Dualité. Bases associées d'un espace E et de son dual E*. Orthogonal dans E* d'une partie de E, orthogonal dans E d'une partie de E* : dimension de l'orthogonal, double orthogonal.

3. ***Matrices***

a) Espace vectoriel $M_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes. Isomorphisme entre $L(K^q,K^p)$ et $M_{p,q}(K)$.

Produit matriciel, transposition. Algèbre $M_n(K)$; matrices inversibles, groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(K)$. Matrices symétriques, antisymétriques.

b) Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre, ces espaces étant munis de bases ; matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel muni d'une base, matrice d'une famille finie de vecteurs relativement à une base. Matrice de passage (la matrice de passage de la base B à la base C est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées dans B du j-ième vecteur de C). Effet d'un changement de base(s) sur la matrice d'une application linéaire.

c) Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme.

d) Rang d'une matrice. Utilisation de matrices carrées extraites pour la détermination du rang. Matrices équivalentes. Caractérisation à l'aide du rang. Toute matrice M de rang r est équivalente à la matrice $I_r = (\alpha_{ij})$, définie par les relations $\alpha_{jj} = 1$ si $1 \leq j \leq r$, et $\alpha_{ij} = 0$ dans tous les autres cas. Rang de la transposée d'une matrice.

e) Systèmes d'équations linéaires, rang. Conditions de compatibilité, systèmes de Cramer.

4. Applications multilinéaires, déterminants

a) Définition des applications multilinéaires, des applications symétriques, antisymétriques, alternées.

b) Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n, critère d'indépendance.

c) Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Mineurs, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne.

e) Applications des déterminants, expression de l'inverse d'une matrice carrée inversible, formules de Cramer ; orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

f) En relation avec la géométrie, application des déterminants à l'étude des systèmes linéaires de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

5. Calcul matriciel

§ a) Exemples de calculs par blocs. Exemples d'emploi de normes matricielles. Conditionnement d'une matrice.

§ b) Opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice ; addition d'un multiple d'une ligne à une autre, multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, échange de deux lignes. Applications à la résolution des systèmes linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées et au calcul du rang.

Algorithme du pivot de Gauss ; pivot partiel, pivot total.

6. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans ce paragraphe, le corps de base est $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

a) Sous-espaces stables par un endomorphisme. Si u et v commutent, $\mathrm{Im}\,u$ et $\ker u$ sont stables par v. Polynômes d'un endomorphisme ; théorème de décomposition des noyaux : si P et Q sont premiers entre eux,

$$\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

b) Valeurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres, vecteurs propres.

c) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynôme annulant un endomorphisme ; lien avec le spectre.

Polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre. Théorème de Cayley-Hamilton.

Endomorphismes diagonalisables ; l'espace est somme directe des sous-espaces propres. Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable. Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

Sous-espaces caractéristiques. Tout endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé peut être trigonalisé : l'espace est somme directe des sous-espaces caractéristiques F_j et il existe une base de chaque F_j telle que la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par u soit triangulaire supérieure ; en outre, la dimension de F_j est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_j. Un tel endomorphisme u s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u = d + n$, où d est diagonalisable, n est nilpotent, et $nd = dn$.

§ d) Valeurs propres d'une matrice carrée, vecteurs (colonnes) propres. Matrices semblables. Diagonalisation, trigonalisation des matrices carrées. Exemples d'emploi de décomposition en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs).

IV. Espaces euclidiens, espaces hermitiens

(cf. analyse 3.I.6 espaces préhilbertiens réels ou complexes.)

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espaces euclidiens

a) Isomorphisme canonique avec le dual.

Sommes directes orthogonales. Dimension de l'orthogonal d'un sous-espace, normale à un hyperplan. Projecteurs et symétries orthogonales.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes symétriques, antisymétriques.

c) Automorphismes orthogonaux. Groupe orthogonal O(E), groupe des rotations (ou spécial orthogonal) SO(E). Matrices orthogonales. Groupes O(n) et SO(n). Matrice associée à un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

Changements de base orthonormale.

d) Déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.

Produit vectoriel en dimension 3 ; expression dans une base orlhonormale directe.

2. Géométrie vectorielle euclidienne

a) Les réflexions engendrent le groupe orthogonal O(E).

b) Dans le plan euclidien orienté (n = 2) : matrice d'une rotation ; angle d'une rotation. Morphisme canonique de $\mathbb{R}$ sur SO(2).

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

c) Dans l'espace euclidien orienté (n = 3) :

Axe et angle d'une rotation. Les demi-tours engendrent SO(3).

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

d) En dimension 2 ou 3 : groupe des similitudes ; similitudes directes.

Rapport d'une similitude, automorphisme orthogonal associé.

3. Espaces hermitiens

a) Sommes directes orthogonales. Projecteurs orthogonaux.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes hermitiens, matrices hermitiennes.

c) Automorphismes unitaires. Groupe unitaire U(E). Groupe U(n) des matrices unitaires d'ordre n.

4. Calcul matriciel et normes euclidiennes

§ a) Calcul de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace et de la distance d'un point à un sous-espace. Application aux problèmes de moindres carrés ; minimisation de $\|AX-B\|^2$, où $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et rang $A = p$.

§ b) Décomposition d'un élément M de $GL_n(\mathbb{R})$ sous la forme $M = QR$, où Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure, par la méthode de Householder.

5. Réduction des endomorphismes symétriques et des endomorphismes hermitiens

§ a) Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique (resp. hermitien) dans une base orthonormale.

Diagonalisation d'une matrice symétrique (resp. hermitienne) au moyen d'une matrice orthogonale (resp. unitaire).

La plus grande valeur propre d'une matrice symétrique A est égale à $\sup_{X\neq 0} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$

b) Formes bilinéaires symétriques sur un espace euclidien, formes quadratiques, polarisation. Endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique ; réduction dans une base orthonormale.

V. Géométrie affine et euclidienne

Dans ce chapitre, l'étude est placée dans le plan et l'espace.

1. Calcul barycentrique ; repérage

a) Sous-espaces affines ; direction d'un sous-espace affine.

b) Repères affines, coordonnées barycentriques.

c) Parties convexes.

d) Repères cartésiens, polaires, cylindriques et sphériques. Changement de repère orthonormal.

2. Configurations

a) Cercles dans le plan. Puissance d'un point par rapport à un cercle.

Ensemble des points M dont le rapport des distances à deux points A et B est constant, ou tels que l'angle de droites (ou de demi-droites) (MA, MB) soit constant

b) Sphères. Intersection d'une sphère et d'un plan, de deux sphères.

c) Coniques. Définitions focales, bifocales ; tangente et normale en un point ; ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale ; hyperbole rapportée à ses asymptotes. Équation cartésienne d'une conique ; réduction en repère orthonormal. Équation polaire d'une conique dont un foyer est à l'origine, la directrice associée et l'excentricité étant données.

3. Transformations

a) Applications affines ; effets sur la barycentration et sur la convexité. Application linéaire associée. Projections, affinités, symétries.

b) Groupe des transformations affines. Morphisme canonique du groupe affine sur le groupe linéaire ; groupe des translations, groupe des homothéties-translations. Isomorphisme canonique du stabilisateur d'un point O sur le groupe linéaire.

c) Groupe des isométries, groupe des déplacements. Les réflexions engendrent le groupe des isométries ; dans l'espace, les demi-tours engendrent le groupe des déplacements.

Similitudes planes directes et indirectes.

d) Classification des déplacements et des isométries du plan et des déplacements de l'espace à partir de l'ensemble des points invariants.

e) Exemples de recherche du groupe des isométries laissant globalement invariante une configuration du plan ou de l'espace. Exemples de recherche de transformations affines transformant une configuration en une autre.

4. Emploi des nombres complexes en géométrie

a) Racines de l'unité et polygones réguliers.

b) Adjonction d'un point à l'infini au plan complexe.

c) Transformations $z \mapsto a\bar{z} + b$ et $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

§ d) Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto z - a$, $z \mapsto \mathbf{Arg}(z-a)$, $z \mapsto \left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|$ et $z \mapsto \mathbf{Arg}\,\dfrac{z-a}{z-b}$.

Exemples de familles de courbes orthogonales associées à des transformations simples du plan complexe.

3. ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

I. Suites et fonctions

1. Suites de nombres réels et de nombres complexes

a) Suites convergentes, divergentes ; suites extraites.

Opérations algébriques sur les limites. Relations de comparaison : domination (u est dominée par v), prépondérance (u est négligeable devant v) et équivalence (u est équivalente à v). Notations $u = \mathrm{O}(v)$, $u = \mathrm{o}(v)$ ou $u << v$, et $u \sim v$.

b) Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Toute suite croissante majorée de nombres réels converge. Suites adjacentes. Développement décimal d'un nombre réel. Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

c) Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes converge. De toute suite bornée de nombres réels ou complexes, on peut extraire une suite convergente. Théorème du point fixe pour une application contractante d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

§ d) Étude du comportement asymptotique de suites. Approximation d'un nombre réel ou complexe au moyen de suites : rapidité de convergence et performance d'un algorithme. Accélération de convergence : méthode de Richardson-Romberg.

§ e) Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et par une condition initiale.

Approximation d'une solution d'une équation numérique. Méthode de dichotomie. Méthode des approximations successives ; méthodes de Newton, d'interpolation linéaire et d'ajustement linéaire.

2. Fonctions d'une variable réelle

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ *et à valeurs réelles ou complexes.*

a) Limite d'une fonction en un point ; continuité en un point. Opérations sur les limites et sur les fonctions continues. Image d'une suite convergente par une fonction continue.

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point domination, prépondérance et équivalence.

b) Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

3. Espaces vectoriels normés, réels ou complexes

Les applications étudiées dans ce paragraphe sont définies sur une partie d'un espace vectoriel normé et à valeurs dans un espace vectoriel normé.

a) Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe.

Norme, distance associée, boules. Parties bornées, diamètre d'une partie.

Distance d'un point à une partie non vide. Applications lipschitziennes. Produit d'une famille finie d'espaces normés.
Exemples de normes usuelles sur les espaces de suites et de fonctions.

b) Voisinages d'un point d'un espace vectoriel normé, ouverts, fermés ; adhérence, intérieur et frontière d'une partie, parties denses, points isolés, points d'accumulation.

Distance induite sur une partie ; voisinages d'un point, ouverts et fermés d'une partie.

c) Limite d'une application suivant une partie, continuité en un point.

Applications continues, caractérisation par image réciproque des ouverts ou des fermés. Continuité d'une application composée ; homéomorphismes. Applications uniformément continues.

d) Suites convergentes, divergentes. Caractérisation des points adhérents et des applications continues à l'aide de suites.

e) Caractérisation des applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue. Normes équivalentes.

Exemples de normes matricielles.

f) Opérations algébriques sur les limites. Algèbre des fonctions numériques continues.

Algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, base canonique de cette algèbre.

4. Espaces complets

a) Suites de Cauchy, espaces complets ; $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets. Parties complètes ; les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées.

b) Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé. Séries convergentes, divergentes, absolument convergentes (c'est-à-dire telles que $\sum \|u_n\| < +\infty$). Dans un espace de Banach, critère de Cauchy pour la convergence d'une série, convergence des séries absolument convergentes.

c) Théorème du point fixe pour les contractions d'une partie fermée d'un espace complet.

d) Critère de Cauchy pour les applications (existence d'une limite en un point).

5. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Équivalence des normes. Toute suite de Cauchy est convergente. De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires.

b) Définition (séquentielle) des parties compactes. Les parties compactes sont les parties fermées bornées.
Image continue d'un compact, application aux fonctions numériques. Continuité uniforme d'une application continue sur un compact.

6. Espaces préhilbertiens réels ou complexes

Produit scalaire (dans le cas complexe, linéaire à droite, semi-linéaire à gauche), norme associée, inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme.

Théorème de Pythagore. Famille orthonormale, méthode de Schmidt.

Existence d'une base orthonormale dans un espace de dimension finie. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un tel sous-espace.

Exemples de suites de polynômes orthogonaux.

7. Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach

Convergence simple, convergence uniforme. Pour des applications définies sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: convergence uniforme sur tout compact. Continuité et limite d'une application définie comme limite d'une suite uniformément convergente.

Critère de Cauchy de convergence uniforme. L'espace des applications bornées d'un ensemble dans un espace de Banach, muni de la norme uniforme, est complet. Il en est de même pour l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues d'un espace normé dans un espace de Banach.

8. Notions sur la connexité

Parties connexes ; les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Image d'une partie connexe par une application continue, théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs ; elle implique la connexité et, dans le cas d'un ouvert d'un espace vectoriel normé, elle lui équivaut.

II. **Fonctions d'une variable réelle : calcul différentiel et intégral**

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle non réduit à un point et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$

1. Approximation des fonctions sur un segment

Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier ; approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions continues affines par morceaux et par des fonctions polynomiales. Interpolation de Lagrange.

2. Dérivation

a) Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.

b) Inégalité des accroissements finis pour une fonction continue sur un intervalle et dérivable sur son intérieur ; caractérisation des fonctions constantes et des fonctions lipschitziennes. Prolongement des fonctions de classe C^1 sur un intervalle privé d'un point.

c) Extrémums locaux des fonctions dérivables à valeurs réelles. Théorème de Rolle.

d) Fonction de Classe C^k (k entier naturel ou k infini) Si deux fonctions sont de classe C^k, leur composée l'est encore. Caractérisation des C^k-difféomorphismes parmi les fonctions de classe C^k ($k \geq 1$). Formule de Leibniz. Définition des fonctions de classe C^k par morceaux : une fonction f est dite de classe C^k par morceaux sur un segment $[a,b]$ s'il existe une suite finie strictement croissante $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des $]a_i,a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe C^k sur $[a_i,a_{i+1}]$; elle est dite de classe C^k par morceaux sur un intervalle quelconque si sa restriction à tout segment est de classe C^k par morceaux.

e) Fonctions à valeurs réelles : fonctions convexes. Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1 par la croissance de la dérivée première et par la position de la courbe par rapport aux tangentes.

3. Intégration sur un intervalle compact

Les seules connaissances exigibles portent sur l'intégration des fonctions continues par morceaux.

a) Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.

b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Notations : $\int_I f(t)dt$; $\int_a^b f(t)dt$.

Linéarité. Si $a \leq b$, $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \| f(t) \| dt$.

Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.
Pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, inégalité de Cauchy-Schwarz.

c) Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.
Approximation de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$ par des sommes de Riemann associées à des subdivisions de $[a,b]$.

d) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle. Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral : soit f une fonction continue sur I ; pour tout point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant au point a ; inversement, pour toute primitive F de f sur I, et pour tout couple (a,b) de points de I, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.
En particulier, pour toute fonction g de classe C^1 sur I, et pour tout couple (a,b) de points de I,

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt \, .$$

Intégration par parties, changement de variable.

Exemples de calculs de primitives.

e) Inégalité des accroissements finis relative à un couple de fonctions de classe C^1, l'une vectorielle, l'autre réelle. Formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral pour une fonction de classe C^{p+1} ; inégalité de Taylor-Lagrange.

§ f) Calcul des valeurs approchées d'une intégrale.
Méthode du milieu (ou des tangentes).
Méthode des trapèzes, méthode de Simpson : majoration du reste. Algorithmes d'approximation d'une intégrale par ces deux méthodes.

4. Étude locale des fonctions

a) Développements limités, opérations sur les développements limités.

b) Exemples simples de développements asymptotiques.

Intégration des relations de comparaison au voisinage d'un point entre des fonctions continues ; intégration des développements limités. Théorème de Taylor-Young (existence d'un développement limité d'ordre p pour une fonction de classe C^p).

5. Fonctions usuelles

a) Fonctions exponentielles et logarithmes, fonctions puissances, fonctions hyperboliques directes et réciproques.

b) Fonctions circulaires directes et réciproques. Fonction $z \to \exp(az)$ où a est complexe.

c) Équations fonctionnelles des fonctions linéaires, exponentielles ; logarithmes et puissances.

6. Intégrales impropres

a) Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Emploi de l'intégration par parties.

b) Intégrales de fonctions positives. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration des relations de prépondérance et d'équivalence au voisinage de $+\infty$: cas des intégrales convergentes, cas des intégrales divergentes.

7. Intégrales dépendant d'un paramètre

a) Passage à la limite uniforme dans les intégrales de fonctions continues sur un segment : application à la dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1.

Exemples de passage à la limite dans les intégrales impropres.

b) Continuité et intégration des fonctions de la forme $x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$, où f est continue ; dérivation lorsqu'en outre $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.

Exemples d'étude de fonctions définies par des intégrales.

c) Convergence en moyenne, en moyenne quadratique : normes associées.

III. Séries

1. Séries de nombres réels ou complexes

a) Séries à termes positifs. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence ; cas des séries convergentes, cas des séries divergentes.

Comparaison à une série géométrique : règles de Cauchy et de D'Alembert.

Comparaison à une intégrale impropre, Convergence des séries de Riemann ; comparaison à une série de Riemann.

b) Séries à termes réels ou complexes. Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; majoration du reste.

Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

c) Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire. Série produit de deux séries absolument convergentes :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

d) Exemples d'encadrement ou d'évaluation asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.

§ e) Recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

2. Séries de fonctions

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$.

a) Convergence simple, convergence uniforme sur un ensemble d'une série de fonctions ; convergence normale (pour la norme uniforme).

b) Continuité et limite en un point de la somme d'une série uniformément convergente. Intégration terme à terme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur un segment ; application à la dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^1.

c) Exemples d'étude de fonctions définies par des séries.

3. Séries entières

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

a) Séries entières d'une variable complexe ; rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence, convergence normale sur tout compact du disque de convergence.

b) Séries entières d'une variable réelle : intégration et dérivation terme à terme dans l'intervalle (ouvert) de convergence.

Développement en série entière de e^x, In$(1 + x)$ et $(1 + x)^\alpha$, où α est réel.

c) Définition de $\exp z$ (ou e^z), $\cos z$ et $\sin z$ pour z complexe. Exponentielle d'une somme, extension des formules de trigonométrie.

4. Séries de Fourier

a) Polynômes trigonométriques ; orthogonalité des fonctions $x \longrightarrow \exp(inx)$. Coefficients et série de Fourier d'une fonction f 2π-périodique continue par morceaux à valeurs complexes (expression sous forme exponentielle, expression en cosinus et sinus). Sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\mathbf{e}^{ikx}$ de la série de Fourier de f ; propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique.

b) Lorsque f est continue par morceaux, convergence de S_n vers f en moyenne quadratique ; formule de Parseval. Théorème de Dirichlet ; convergence de $S_n(x)$ vers la demi-somme des limites à droite et à gauche de f au point x lorsque f est de classe C^1 par morceaux. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue et de classe C^1 par morceaux.

5. Emploi des séries entières et des séries de Fourier

Exemples de recherche de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle.

§ Exemples d'utilisation de tels développements pour obtenir des valeurs approchées d'une fonction.

Exemples d'emploi de séries entières pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

IV. Équations différentielles

1. Systèmes linéaires d'ordre 1

a) Écriture matricielle $X' = A(t)X + B(t)$ où A (respectivement B) désigne une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathbb{C}^n$). Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy (théorème admis). Dimension de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation $X' = A(t).X$. Méthode de variation des constantes.

b) Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme ; application au problème de Cauchy. Résolution du système $X' = AX$ par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire.

2. Équations linéaires scalaires

a) Équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes. Système d'ordre 1 associé, étude du problème de Cauchy ; solutions de l'équation sans second membre, méthode de variation des constantes. Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation sans second membre associée ne s'annulant pas sur I.

b) Équations linéaires à coefficients constants. Dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Cas où le second membre est une exponentielle polynôme.

3. Notions sur les équations non linéaires

a) Solutions d'une équation différentielle $x' = f(t,x)$ (resp. $x'' = f(t,x,x')$), où f est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$). Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

§ b) Recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 par la méthode d'Euler.

c) Résolution des équations des types suivants (en liaison avec la géométrie) : équation associée à une forme différentielle exacte, équation à variables séparables, équation homogène :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

d) Exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction (en liaison avec des propriétés d'invariance), d'échange de la variabIe et de la fonction, de paramétrages.

§ e) Exemples d'étude qualitative des courbes intégrales d'une équation différentielle. Exemples de recherche des courbes intégrales d'un champ d'éléments de contact ou d'un champ de vecteurs dans le plan.

V. Notions sur les fonctions de plusieurs variables réelles

1. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$.

a) Limite, continuité, dérivée selon un vecteur, dérivées partielles. Applications de classe C^1 (ou continûment différentiables).
b) Développement limité à l'ordre 1 d'une application de classe C^1 ; différentielle, matrice jacobienne, jacobien. Si deux applications sont de classe C^1, leur composée l'est encore ; difféomorphismes. Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque (les applications considérées étant de classe C^1). Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe C^1. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1 ; caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe.

c) Dérivées partielles d'ordre k ; théorème de Schwarz. Définition des applications de classe C^k sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (k entier naturel ou k infini). Si deux applications sont de classe C^k, leur composée l'est encore ; définition des C^k-difféomorphismes $(k \geq 1)$

d) Gradient d'une fonction numérique de classe C^1, points critiques. Formule de Taylor-Young pour une fonction numérique de classe C^1. Étude de l'existence d'un extrémum local (c'est-à-dire d'un maximum local ou d'un minimum local) d'une fonction numérique de deux variables de classe C^2 en un point critique où $rt - s^2 < 0$

2. Calcul intégral

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions de ce paragraphe.

a) Champs de vecteurs. Divergence, rotationnel. Intégrales curvilignes. Potentiel scalaire ; condition nécessaire et suffisante d'existence pour un champ de classe C^1 sur un ouvert étoilé.

b) Intégrales doubles et intégrales triples. Linéarité, croissance ; additivité par rapport aux ensembles. Calcul par intégrations successives. Changements de variables ; passage en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques. Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.

VI. Notions de géométrie différentielle

1. Courbes et surfaces

L'étude théorique est placée dans des hypothèses très larges. Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour ce paragraphe sont admises.

a) Définitions diverses d'une courbe (plane ou non) et d'une surface, par paramétrages ou par équations.

b) En un point régulier ; tangente à une courbe, plan normal ; plan tangent à une surface, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.

c) Étude locale d'une courbe paramétrée plane : position de la courbe par rapport à une droite ; concavité en un point birégulier, rebroussements, inflexions. Étude de branches infinies. Construction de courbes paramétrées.

d) Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace : plan osculateur en un point birégulier, étude locale en un point trirégulier.

e) Enveloppe d'une famille de droites dans le plan, donnée par une équation $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$, sur un intervalle où $ab' - ba'$ ne s'annule pas.

f) Étude des courbes planes définies par des coordonnées polaires : étude locale, comportement asymptotique, construction.

2. Propriétés métriques des courbes planes

Longueur d'un arc paramétré de classe C^1, abscisse curviligne. Pour un arc birégulier du plan orienté, repère de Frenet, courbure, centre de courbure, développée, développantes.

3. Cinématique du point

a) Vitesse, accélération. Trajectoire, loi horaire. Moment cinétique, dynamique. Énergie cinétique.

b) Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, mouvements circulaires. Mouvements à accélération centrale ; oscillateurs harmoniques, mouvement des planètes.

4. Probabilités et statistiques

1. Espaces probabilisés

Expériences aléatoires . Evénements. Parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste à propos des opérations sur les événements.

Tribus. Probabilités. Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales ; formule de Bayes. Indépendance (en probabilité) d'événements ; indépendance mutuelle d'un nombre fini d'événements ; indépendance deux à deux.

Les candidats devront savoir utiliser sur des exemples simples la formule donnant la probabilité d'une réunion finie d'événements (formule de Poincaré, ou de crible).

La théorie des espaces probabilisés produits n'est pas au programme.

Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur les espaces probabilisés.

2. Variables aléatoires

Définition d'une variable aléatoire réelle, ou plus généralement à valeurs dans IR^n. Evénements liés à une variable aléatoire. On admettra que la somme et le produit de deux variables aléatoires sont des variables aléatoires.

Les propriétés générales des variables aléatoires sont hors programme. L'objectif est la mise en fonctionnement de ce concept sur les exemples décrits dans les trois alinéas qui suivent. La tribu borélienne de IR n'est pas au programme.

a) Variables aléatoires réelles discrètes

Loi de probabilité. Fonction de répartition $F(x)=P[X \leq x]$.

Moments : espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type.

Variables centrées, variables réduites.

Variable aléatoire y = g(X) fonction d'une variable aléatoire discrète X, où g est définie sur l'ensemble des valeurs de X.

Lois discrètes usuelles : loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson.

b) Vecteurs aléatoires (à valeurs dans R^n) discrets. Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans IR^2. Lois marginales.
Lois conditionnelles. Indépendance de deux variables aléatoires réelles.
Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans IR^n. Indépendance de n variables aléatoires réelles.
Linéarité de l'espérance mathématique. Espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires.
Covariance. Coefficient de corrélation linéaire. Stabilité pour la somme des lois binomiales, des lois de Poisson.

Dans de nombreuses situations, on rencontre des exemples simples de fonctions de plusieurs variables aléatoires (sommes, produits). On admettra que si X1,…, Xn sont indépendantes, toute fonction de (X1,…, Xp) est indépendante de toute fonction de (Xp+1,…, Xn). Aucune théorie générale des fonctions de plusieurs variables aléatoires n'est au programme.
c) Variables aléatoires à densité
On dit qu'une variable aléatoires X à valeurs réelles admet une densité f si sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

où f est une fonction à valeurs réelles positives ayant un nombre fini de points de discontinuité et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

Moments, espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type. Variable centrées, variables réduites.
Exemples simples de fonctions d'une variable aléatoire (tels que aX + b, X^2 , exp X…). Lois définies par une densité usuelle : loi uniforme, exponentielle, normale (ou de Laplace-Gauss). Densité d'un vecteur aléatoire à valeurs dans IR^2. Indépendance de deux variables aléatoires réelles à densité. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur ces questions.

3. Convergence des suites de variables aléatoires. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (cas des variables discrètes et des variables à densité).

Convergence en probabilité. Loi faible des grands nombres.
Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale..
Approximation de la loi binomiale par la loi de Gauss, par la loi de Poisson.
Enoncé du théorème limite central.
L'étude de la convergence en loi n'est pas au programme.

4. Notions de statistiques.

a) Statistique descriptive : paramètres de position (moyenne, médiane, quantiles, modes) et de dispersion (écart-type, variance). Divers modes de représentation graphique.
b) Echantillons. Intervalle de confiance d'une moyenne ou d'une fréquence.
c) Tests d'hypothèse ; les deux types de risque d'erreur.
d) Tests de paramètres : estimation du paramètre d'une loi binomiale, de la moyenne m d'une loi normale. Test unilatéral, bilatéral.

Comparaison de deux moyennes.

ANNEXE II

Instructions et commentaires

Ils figurent au BOEN n° 33 du 26 septembre 1991 et au BO Spécial n°5 du 21 octobre 1993.

Pour les épreuves écrites les candidats doivent se munir de calculatrice afin de s'en servir lorsque ce sera autorisé.

Pour les épreuves orales les calculatrices personnelles sont interdites. Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du C.A.P.E.S.

3. Statistiques

3.1 Evolution et résultats globaux

Année	Postes	Inscrits	Présents aux Deux épreuves écrites	Admissibles	Présents aux deux épreuves orales	Admis
CAPES 1999	945	8950	7332	2274	2174	945
CAFEP	210	1055	847	107	105	57
CAPES 2000	890	8038	6750	2067	1930	890
CAFEP	206	1130	1030	145	142	78
CAPES 2001	990	6972	5676	2109	1946	990(*)
CAFEP	215	1095	889	200	194	113
CAPES 2002	1125	6166	4948	2213	2065	1125(*)
CAFEP	230	906	745	192	189	118
CAPES 2003	1195	5755	4428	2328	2174	1195
CAFEP	230	846	636	214	209	116
CAPES 2004	1003	5604	4194	2040	1900	1003
CAFEP	177	933	658	205	192	103

(*) *En 2001 et 2002, des listes complémentaires avaient été publiées.*

La décroissance du nombre des candidats s'est à peu près interrompue. Comme le nombre des postes offerts au CAPES a été diminué (d'environ 16%), le ratio nombre de candidats/nombre de postes a augmenté, pour atteindre environ 4,2.

Le jury est pour sa part conscient de ses obligations, dont l'une est de proposer des candidats de qualité, et une autre est de proposer autant que possible de pourvoir tous les postes offerts. Il en découle l'obligation de garder au concours un aspect suffisamment attractif : tant en ce qui concerne les épreuves écrites que les épreuves orales, le but poursuivi est de donner aux candidats le sentiment d'une évaluation juste et exigeante, mais qui reste en même temps humaine. C'est par exemple dans cet esprit que le jury s'efforce systématiquement de rassurer individuellement les candidats qui, lors des épreuves orales, expriment leur anxiété et leur manque de confiance en eux, et c'est également dans cet esprit que l'accueil de tous les candidats est organisé.

Les barres d'admissibilité et d'admission restent identiques pour les deux concours (CAPES et CAFEP). Ceci nous a conduit cette année encore à ne pas proposer pour le CAFEP une liste de la longueur maximale autorisée.

3.2 Statistiques par catégories

C.A.P.E.S.

Catégorie (situation professionnelle)	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Admis
Divers	608	279	118	47
Elève IUFM	1870	1799	905	522
Etudiant	1105	886	533	263
Cadre conv. collectives	198	72	34	12
Sans emploi	812	450	201	71
Vacataire second degré.	115	82	36	17
Maître auxiliaire	85	64	25	7
Contractuel second degré	634	440	141	46
M.I. et S E	177	122	47	18
Total	5604	4194	2040	1003

Caractères divers	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Admis
Femmes	2468	1996	871	465
Hommes	3136	2198	1169	538
Français et Union Européenne	5591	4193	2040	1003
U.E. non français	60	28	12	7
Etrangers hors U.E.	13	1	0	0
Moins de 30 ans	4385	3583	1796	917
Moins de 25 ans	2494	2236	1214	669

C.A.F.E.P.

Catégorie (situation professionnelle)	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Admis
Divers	208	199	88	62
Etudiant	113	77	34	9
Enseignant titulaire Educ.Nationale	13	5	1	0
Agent non titulaire Educ.Nationale	344	248	44	20
Enseignement privé	35	20	3	0
Agent fonction publique état	18	10	4	1
Hors fonction publique ou sans emploi	202	99	31	11
Total	933	658	205	103

Caractères divers	Inscrits	Présents aux deux épreuves écrites	Admissibles	Admis
Femmes	563	424	114	64
Hommes	370	234	91	39
Moins de 30 ans	690	538	167	91
Moins de 25 ans	305	281	104	63

On peut remarquer que la proportion de femmes est plus élevée pour le CAFEP que pour le CAPES ; cette proportion évolue pendant les deux concours de manière analogue :
- parmi les inscrits, les femmes sont *plus* nombreuses en proportion à venir effectivement passer les épreuves écrites (pour les deux concours) ;
- parmi les présents à l'écrit, les femmes sont *moins* nombreuses en proportion a être admissibles (pour les deux concours) ;
- parmi les admissibles, les femmes sont *plus* nombreuses en proportion a être reçues (pour les deux concours).

3.3 Résultats par académie

C.A.P.E.S.

Académie	Inscrits	Présents aux 2 épreuves écrites	Admissibles	Admis
Aix-Marseille	308	226	104	54
Amiens	147	102	44	23
Besançon	111	85	55	27
Bordeaux	238	193	100	53
Caen	113	94	53	20
Clermont-Ferrand	75	59	41	22
Corse	27	15	2	1
Dijon	154	125	68	31
Grenoble	218	167	88	47
Guadeloupe	95	65	11	5
Guyane	12	4	1	1
Lille	419	324	157	73
Limoges	54	44	17	8
Lyon	286	221	117	61
Martinique	58	32	5	1
Montpellier	284	227	92	47
Nancy-Metz	183	130	64	30
Nantes	270	210	98	47
Nice	169	131	51	18
Orléans / Tours	125	102	48	28
Paris / Créteil / Versailles	1059	702	350	166
Poitiers	145	124	67	32
Reims	101	76	45	22
Rennes	251	203	106	43
Réunion	72	48	21	15
Rouen	157	120	50	25
Strasbourg	159	123	60	32
Toulouse	314	242	125	71

C.A.F.E.P.

Académie	Inscrits	Présents aux 2 épreuves écrites	Admissibles	Admis
Aix-Marseille	35	22	11	4
Amiens	14	8	5	1
Besançon	20	10	3	2
Bordeaux	42	35	7	3
Caen	15	12	4	4
Clermont-Ferrand	14	6	3	1
Corse	0	0	0	0
Dijon	17	8	0	0
Grenoble	48	37	14	8
Guadeloupe	3	1	0	0
Guyane	1	1	0	0
Lille	89	64	21	9
Limoges	4	2	0	0
Lyon	43	32	20	13
Martinique	5	1	0	0
Montpellier	42	23	6	1
Nancy / Metz	23	15	8	3
Nantes	116	100	26	11
Nice	24	17	2	2
Orléans / Tours	14	11	2	2
Paris / Créteil / Versailles	155	102	27	13
Poitiers	10	6	4	3
Reims	11	8	4	1
Rennes	113	82	21	13
Réunion	3	3	0	0
Rouen	13	8	1	1
Strasbourg	22	17	5	4
Toulouse	37	27	11	4

3.4 Répartition des notes

La barre d'admissibilité a été fixée à 7,2/20 (7,1/20 en 2003 , 7,2/20 en 2002 , 7,4/20 en 2001)

Épreuves écrites du C.A.P.E.S.

Histogramme cumulé (notes sur 20)									
	Total			première épreuve			seconde épreuve		
	présents	admissibles	admis	présents	admissibles	admis	présents	admissibles	admis
20	0	0	0	4	4	4	3	3	3
19	11	11	10	17	17	15	27	27	24
18	66	66	61	148	148	123	130	130	110
17	174	174	151	300	300	251	260	260	217
16	247	247	214	385	385	319	346	346	284
15	346	346	296	439	439	358	404	404	326
14	454	454	384	549	549	433	499	499	392
13	583	583	479	675	674	513	648	648	491
12	761	761	598	826	824	608	786	786	567
11	956	956	704	1020	1017	697	999	999	676
10	1210	1210	808	1261	1247	793	1263	1247	788
9	1477	1477	889	1548	1489	861	1560	1509	875
8	1811	1811	962	1899	1731	924	1861	1715	934
7	2196	2040	1003	2246	1888	964	2261	1906	978
6	2575	2040	1003	2615	1976	990	2602	1994	998
5	2936	2040	1003	2959	2020	1002	2948	2029	1002
4	3278	2040	1003	3331	2036	1003	3261	2037	1002
3	3596	2040	1003	3635	2039	1003	3539	2040	1003
2	2869	2040	1003	3961	2040	1003	3839	2040	1003
1	4120	2040	1003	4235	2040	1003	4130	2040	1003
0	4194	2040	1003	4325	2040	1003	4202	2040	1003

Les quartiles, calculés sur l'ensemble des présents, et en note sur 20, sont:

10,7,4 pour la première épreuve

10,7,4 pour la seconde épreuve

Ils sont plus espacés que les années précédentes ; l'étalement des notes de l'écrit a donc été plus important, et notamment le nombre de copies recevant de très bonnes notes a sensiblement augmenté ; cependant, le poids de l'oral reste statistiquement supérieur à celui de l'écrit, les intervalles inter-quartile étant supérieurs à l'oral (respectivement 8 et 7 points aux deux épreuves orales, contre 6 et 6 aux deux épreuves écrites)

Épreuves écrites du C.A.F.E.P.

Histogramme cumulé (notes sur 20)									
	Total			première épreuve			seconde épreuve		
	présents	admissibles	admis	présents	admissibles	admis	présents	admissibles	admis
20	0	0	0	1	1	1	0	0	0
19	1	1	1	1	1	1	2	2	2
18	3	3	3	9	9	8	6	6	5
17	8	8	7	23	23	20	14	14	12
16	17	17	14	28	28	25	20	20	17
15	23	23	19	33	33	29	24	24	21
14	26	26	22	43	43	36	33	33	27
13	42	42	34	50	50	40	43	43	34
12	52	52	43	59	59	47	63	63	45
11	72	72	57	77	77	55	82	82	56
10	98	98	71	103	100	64	112	111	69
9	129	129	85	146	136	81	146	140	82
8	164	164	93	184	159	90	191	167	90
7	221	205	103	240	183	98	232	184	95
6	289	205	103	297	193	101	290	197	100
5	360	205	103	364	200	102	358	204	103
4	417	205	103	429	203	103	425	204	103
3	499	205	103	499	205	103	478	205	103
2	562	205	103	590	205	103	557	205	103
1	639	205	103	657	205	103	643	205	103
0	658	205	103	678	205	103	661	205	103

Les quartiles, calculés sur l’ensemble des présents, et en note sur 20, sont:

8,5,2 pour la première épreuve
8,5,2 pour la seconde épreuve

Épreuves orales et total général des candidats admissibles, C.A.P.E.S. et C.A.F.E.P.

notes sur 20, effectifs cumulés sur les admissibles (adm) et les reçus

	CAPES						CAFEP					
	Total général		Oral 1 (exposé)		Oral 2 (dossier)		Total		Oral 1 (exposé)		Oral 2 (dossier)	
	adm	reçus	adm	reçus	adm	reçus	adm	reçus	adm	reçus	adm	reçus
20	0	0	53	52	14	14	0	0	4	4	4	4
19	0	0	107	106	36	36	0	0	9	8	6	6
18	5	0	177	174	73	71	1	1	19	19	9	9
17	19	19	262	253	110	105	3	3	25	24	16	16
16	57	57	353	332	178	167	5	5	32	30	27	27
15	124	124	461	421	262	242	15	15	45	43	36	34
14	239	239	569	511	373	332	24	24	58	56	47	43
13	376	376	671	584	501	435	29	29	72	65	64	54
12	581	581	802	662	633	522	51	51	81	71	76	65
11	821	821	926	731	779	613	75	75	93	79	94	75
10	1113	1003	1054	803	938	706	103	103	104	85	112	85
9	1350	1003	1161	849	1082	780	124	103	116	88	124	90
8	1579	1003	1306	890	1276	856	155	103	133	94	147	96
7	1728	1003	1406	919	1403	895	181	103	142	97	155	98
6	1841	1003	1518	946	1527	935	187	103	154	100	161	100
5	1888	1003	1586	964	1610	953	191	103	162	101	169	103
4	1900	1003	1658	979	1701	975	192	103	171	102	175	103
3	1900	1003	1734	990	1767	993	192	103	179	103	183	103
2	1900	1003	1814	999	1838	997	192	103	184	103	187	103
1	1900	1003	1881	1002	1893	1002	192	103	188	103	191	103
0	1900	1003	1902	1003	1900	1003	192	103	192	103	192	103

Quartiles pour le CAPES :
14, 10, 6 pour l'épreuve d'exposé ; 13, 9, 6 pour l'épreuve sur dossier.

Quartiles pour le CAFEP :
14, 10, 6 pour l'épreuve d'exposé ; 13, 10, 8 pour l'épreuve sur dossier.

Les derniers reçus, pour les deux concours, avaient un total de 10,2/20.

4. Les épreuves écrites

Les épreuves écrites ont eu lieu dans la première semaine du mois de mars 2004.

La proportion des candidats ayant abandonné à l'issue de la première épreuve reste comparable à celle observée les années précédentes. Environ 150 candidats ont une note à la première épreuve et ont été absents à la seconde épreuve, soit entre 3 et 4%. Nous trouvons aussi quelques candidats absents à la première épreuve, mais qui sont venus composer le lendemain.

Il est rappelé que l'absence à une épreuve entraîne l'élimination du candidat. Le retard est aussi une cause d'élimination, les candidats arrivant après la distribution des sujets n'étant pas autorisés à composer.

La définition des épreuves proprement dites, les buts généraux qu'elles poursuivent, ainsi que le programme auquel elles sont limitées, sont détaillées dans les documents officiels (voir la partie qui leur est consacrée dans le rapport).

Les correcteurs élaborent leurs grilles de correction lors d'une réunion plénière, tenue après qu'ils aient eu le temps d'analyser les sujets et de lire un échantillon de copies. Chaque copie est ensuite corrigée deux fois, de manière totalement indépendante. Les deux correcteurs jumelés se concertent à la fin de leur travail pour décider de la note finale.

Aucun commentaire, aucune annotation particulière ne figure sur les copies. Seule la note finale après harmonisation y est inscrite. Les candidats qui souhaitent après coup revoir leur travail pour mieux comprendre le résultat obtenu peuvent, conformément aux dispositions de la loi n° 78.753 du 17 juillet 1978, obtenir satisfaction en s'adressant à la D.P.E qui conserve les copies pendant un an à cet effet.

De manière générale, les sujets des épreuves écrites sont construits dans le but de discriminer l'ensemble des candidats, des meilleurs aux plus faibles ; c'est pourquoi de très bonnes notes ont pu être attribuées à des copies n'abordant pas, et même de loin, l'ensemble du sujet. Ce fait que l'on peut trouver contestable s'explique aussi par le souci qu'ont les auteurs de sujets de construire des problèmes offrant un contenu suffisamment construit, notamment aboutissant à un ou des résultats significatifs, et aussi la nécessité de ne pas trop centrer le texte sur une partie trop réduite du programme.
Les questions qui recevront un poids particulièrement significatif dans le classement des candidats ne sont pas distinguables dans l'énoncé (d'autant qu'elles ne s'imposent parfois qu'au moment de la correction des copies), ce qui empêche d'estimer raisonnablement une note à la lecture d'une copie isolée.

5. Les épreuves orales

5.1 Organisation

Elles ont eu lieu du 25 juin au 18 juillet 2004 au lycée Lakanal (Sceaux). Les interrogations avaient lieu tous les jours, dimanches et quatorze juillet inclus. Une pause a eu lieu à mi-parcours du 5 au 8 juillet.
Le jury était séparé en 22 commissions de trois personnes. La composition de ces commissions est déterminée en tenant compte de l'obligation de croiser les compétences, ce qui conduit à faire travailler ensemble des personnes intervenant aux divers niveaux possibles, enseignement secondaire, enseignement post-baccalauréat, enseignement supérieur, université

et IUFM, inspection pédagogique régionale. La présence de personnels enseignant en IUFM fait pour chaque cas l'objet d'une réflexion appropriée, le but poursuivi étant à la fois d'éviter autant que possible le « mélange des genres » et d'éviter de trop distendre les liens avec les centres de formation. Cette remarque vaut aussi, malgré l'anonymat, pour la correction des épreuves écrites.
Les candidats sont convoqués en début d'après-midi pour l'épreuve d'exposé et le lendemain matin pour l'épreuve sur dossier. Ils passent devant deux commissions jumelées qui échangent les candidats pour la deuxième épreuve. Chaque commission fait passer les deux types d'épreuves. Un membre de la présidence accueille les candidats avant chaque épreuve afin d'en préciser les modalités et rappeler quelques instructions à son sujet.
Les candidats pouvaient fournir une adresse électronique lors de leur inscription. Immédiatement après signature de la liste des admissibles, les résultats ont été transmis aux adresses connues, ce qui a permis aux candidats dont l'adresse était encore en état de fonctionner de connaître leur résultat immédiatement après la signature de la liste.

Les références des textes officiels décrivant la forme des épreuves orales sont rappelées dans la partie 1.2 de ce rapport.

5.2 Conseils pratiques.

Les demandes de déplacements ou reports de la date de la convocation ne peuvent être éventuellement pris en considération par la présidence du jury que dans les deux cas qui suivent :

- coïncidence entre deux convocations à des concours de recrutement de l'Education Nationale auxquels le candidat est simultanément admissible (CAPES et agrégation, ou CAPLP, ou CRPE par exemple)
- cas de force majeure, maladie, ou événement familial d'importance majeure.

Lorsque ces demandes sont prises en considération, il n'est pas toujours possible d'y répondre favorablement. Réaliser les arrangements correspondants *n'est pas* une obligation du jury. La convocation aux épreuves orales comporte un accusé de réception à renvoyer obligatoirement, par retour du courrier, au président du jury. De trop nombreux candidats compliquent et accroissent la tâche de la présidence en négligeant cette obligation. L'organisation quotidienne des convocations ne permet en effet de tenir compte de demandes légitimes de déplacement ou report de convocation en procédant à des échanges que si la présidence du jury est informée de la présence ou l'absence prévue par chaque candidat admissible.

Il est rappelé aux candidats que l'adresse qu'ils fournissent lors de leur inscription doit être une adresse permanente, valable pour toute la durée des épreuves et pour la phase d'affectation. Ils doivent éventuellement prendre toute disposition pour que le courrier puisse les atteindre pendant toute la période concernée (cf. B.O. spécial n° 13 du 31 août 1995, p. 13).

Une tenue vestimentaire correcte est souhaitable : ce qui est convenable en villégiature ne l'est pas nécessairement devant le jury d'un concours de recrutement. L'utilisation des téléphones portables est interdite dans les locaux du concours, tant pour éviter d'éventuelles fraudes que pour ne pas déranger les candidats par des sonneries intempestives.

Les oraux sont publics. Le nombre important des visiteurs conduit la présidence du jury à réglementer leurs déplacements dans les locaux du concours. Ils ne peuvent y pénétrer que pour accompagner une vague de candidats dans les salles de commission et ne doivent en aucun cas parler aux candidats ou stationner dans les couloirs. Afin de ne pas trop perturber ni les candidats ni le bon fonctionnement du concours, le nombre des visiteurs est limité à au plus deux dans la même salle de commission.

Le CAPES et le CAFEP sont des concours et non des examens ; comme à l'écrit, la note d'oral sert à classer les candidats les uns par rapport aux autres. Cette note a une valeur relative et ne peut refléter ce qui serait la valeur objective d'une épreuve. Il est difficile voire impossible dans les faits pour le candidat de s'évaluer lui-même, et donc de prévoir la note qu'il recevra.

Les notes font l'objet de deux saisies informatique indépendantes, suivies d'une confrontation des deux saisies et de l'édition de listes soumises aux commissions pour vérification. Ces dispositifs rendent l'hypothèse d'une erreur de transmission improbable autant qu'il est humainement possible.

5.3 L'évaluation des épreuves orales

Á un concours de recrutement de l'enseignement secondaire, l'on se trouve au croisement d'exigences de nature assez diverses.
On pourrait se demander pourquoi l'évaluation des compétences purement disciplinaires est présente dans un tel concours, puisque celui-ci s'adresse aux titulaires d'une licence, et que les candidats ont ainsi déjà fait leurs preuves en ce domaine. Cette position mérite d'être discutée, et réfutée, avec soin.
Les licences délivrées par des systèmes de formations assez largement autonomes sont loin d'être uniformes, ce qui justifie déjà le maintien de la présence d'une évaluation disciplinaire au sein du CAPES. De plus, les licences ne peuvent pas toujours suffire en elles-mêmes si leur contenu n'a pas été prévu de manière spécifique pour convenir à un futur enseignant du secondaire. Enfin, il est prévu que certaines personnes, quoique non titulaires d'une licence, ont le droit se présenter au concours. Tous ces facteurs plaident pour le maintien d'une évaluation disciplinaire forte dans les épreuves du CAPES.
Par leur position professionnelle, une majorité des interrogateurs aux épreuves orales sont naturellement attentifs en premier lieu au contenu proprement disciplinaire des prestations. En composant les commissions de manière à varier au mieux les points de vue, il est possible de faire en sorte que la capacité proprement professionnelle soit correctement prise en compte. Même si la vérification finale de l'aptitude à « tenir » devant les élèves repose sur l'évaluation du stage, il est demandé au candidat, lors des deux épreuves orales, de montrer qu'il dispose des qualités nécessaires en matière de communication et de présence devant les auditeurs que sont les membres du jury.

Il n'y a pas de grille chiffrée d'évaluation pour les épreuves orales ; l'on peut simplement définir trois types de compétences pour lesquelles une insuffisance flagrante amène la commission à abaisser la note de manière significative ou déterminante :

- Les compétences en communication : élocution, clarté, attitude envers la commission et capacité de prendre en compte les questions, présentation du tableau, maîtrise du temps, de l'écrit au tableau, de la calculatrice et du rétroprojecteur, etc.
- Les compétences disciplinaires et techniques : l'absence de propositions ou d'affirmations mathématiquement inexactes, la présence relativement au thème traité de connaissances et de résultats cohérents, l'absence de lacune fondamentale relativement à ce thème, le respect des consignes associées au thème et notamment celles concernant l'usage des calculatrices.

- Les compétences de nature pré-professionnelle : connaissance des programmes[1], capacité à construire des exposés et des choix d'exercices adaptés et progressifs, maîtrise à un niveau suffisant des propositions, démonstrations, solutions que le candidat propose de lui-même.

5.4 Première épreuve : exposé sur un thème donné.

Le texte qui suit s'appuie sur la note parue dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993, qui définit les épreuves du CAPES externe de mathématiques.

La première épreuve orale dure 45 minutes réparties en :

- 25 minutes pour l'exposé, le candidat gère son temps et sa présentation comme il l'entend, le jury n'intervenant pas sur le contenu, et n'interrompant en aucune manière le candidat, sauf éventuellement en cas de problème pratique.
- 20 minutes d'entretien avec la commission.

Les candidats tirent au sort deux thèmes d'exposé et en choisissent un. Ils disposent de deux heures pour préparer l'épreuve. Ils ne disposent d'aucun document autre que les programmes et les instructions relatives au concours.
Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils peuvent emprunter à la bibliothèque du CAPES une calculatrice programmable scientifique et graphique. La liste des modèles proposés figure en partie **V.3** de ce rapport.
Le programme de cette épreuve (cf. B.O. spécial n° 8 du 24 mai 2001 et partie **I.2** de ce rapport) est extrait du programme de l'écrit du concours.
Les candidats peuvent faire appel à l'intégralité du programme complémentaire (titre B) au cours de cette épreuve, que ce soit pendant leur exposé ou pendant l'entretien avec le jury. Cependant, aucun thème proposé ne peut porter sur les paragraphes extraits du programme complémentaire complétant le programme de cette épreuve (voir partie **I.2**), ni a fortiori sur d'autres points du programme complémentaire. Pendant l'entretien, le jury a toute latitude pour interroger le candidat sur les programmes de l'enseignement secondaire (titre A, partie **I.2**). Toute notion abordée par le candidat peut aussi faire l'objet de questions : il est attendu d'un futur enseignant qu'il ne présente à ses élèves que des notions dont il peut parler de manière un tant soit peu construite; par conséquent, une allusion ou une ouverture sur un point hors du programme de cette épreuve n'est susceptible de valoriser le travail du candidat que si elle repose sur des connaissances suffisamment cohérentes, et si elle s'inscrit de manière logique comme un prolongement acceptable devant une classe du sujet traité.
Les thèmes d'exposé proposés forment un ensemble couvrant le programme dans son intégralité et les couplages sont conçus de manière à proposer un vrai choix au candidat, deux thèmes jugés trop proches étant normalement écartés.
L'organisation actuelle du concours ne permet pas l'évaluation des compétences des candidats en matière de TICE au sens ou il n'y a pas d'épreuve devant ordinateur. Cette dimension de l'enseignement est abordée à travers l'usage de calculatrices rétroprojetables, dont la puissance permet d'aborder l'usage élémentaire de tableurs, ainsi que de logiciels –il est vrai rudimentaires- de géométrie.
Pour une partie, de plus en plus importante, des sujets, l'illustration de telle ou telle propriété sur une calculatrice est expressément conseillée dans l'intitulé du sujet. Il est vivement conseillé aux candidats de prendre en compte ce conseil.

[1] Il n'est pas attendu de la part des candidats une connaissance détaillée, excessivement précise des programmes en vigueur ; néanmoins, les confusions ou lacunes les plus grossières sont considérées comme des points négatifs et sont relevées.

5.5 Deuxième épreuve : épreuve sur dossier. Choix d’exercices sur un thème donné.

AVERTISSEMENT IMPORTANT

A partir de la session 2005, la forme de l’épreuve suivra la note parue dans le B.O. n°1 du 1er janvier 2004. Le contenu de cette note, ainsi que des commentaires et des informations émanant de la présidence du jury, peuvent être consultés sur le site du jury :

www.capes.math.jussieu.fr
(voir également l’en tête du rapport)

Cette épreuve se déroulait pour la dernière fois sous la forme correspondant à la note parue dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993, qui définit les épreuves du CAPES externe de mathématiques, et qui est détaillée comme suit.

Epreuve sur dossier 2004 :

L’épreuve sur dossier dure au maximum 45 minutes. Le temps est réparti de la façon suivante :

- Pendant 25 minutes au maximum le candidat expose son choix d’exercice (objectifs, illustration du thème,…), puis ;
- Pendant 20 minutes au minimum un entretien s’instaure, entre la commission et le candidat, au cours duquel le candidat sera amené à résoudre au moins un exercice choisi par la commission.

Les remarques concernant les TICE sont identiques à celles données pour la première épreuve orale (voir partie **5.5** ci-dessus). Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils peuvent emprunter à la bibliothèque du CAPES une calculatrice programmable scientifique et graphique. La liste des modèles proposés figure en partie **V.3** de ce rapport. Il y a cependant une différence importante entre les deux épreuves. L’injonction selon laquelle le dossier appelle une présentation à l’aide d’une calculatrice est *obligatoire* pour certains dossiers, dossiers dans lesquels figure, immédiatement après l’énoncé du thème, l’avertissement suivant :

" Pour au moins l'un de ces exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice ".

Cet avertissement figurait dans les dossiers suivants :
06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 21, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 65, 67, 68, 69, 72, 73, 74, 77, 79, 80, 81, 82, 84, 87, 88, 89, 90, 91.
La non prise en compte de cet avertissement entraîne nécessairement une dévalorisation importante de la prestation du candidat.

Deux dossiers (62 et 63) comportaient une mention encore plus contraignante :

« Chacun des exercices proposé doit, pour sa résolution, faire appel à l’utilisation d’une calculatrice »

L’épreuve sur dossier se place au niveau de l’enseignement secondaire (cf. B.O. n°21 du 26 mai 1994). Il n’y a aucune extension de programme dans ce cas. Les candidats ont à choisir un sujet parmi deux proposés par le jury.
On rappelle que les “références aux programmes” ne constituent pas un plan de l’exposé, et que la “documentation conseillée” n’est pas exhaustive. Il ne s’agit dans les deux cas que d’une aide apportée aux candidats.

Les candidats ont deux heures pour préparer l’épreuve et peuvent utiliser les ouvrages imprimés disponibles dans le commerce, vierges de toute annotation manuscrite. Ils peuvent les apporter ou en emprunter à la bibliothèque du concours. Le jury peut s’opposer à l’utilisation de certains ouvrages s’il juge que cela risque de dénaturer l’épreuve (cf. B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993).
La “documentation conseillée” ne peut-être que très générale. La bibliothèque possède les manuels usuels en plusieurs exemplaires, mais la fourniture d’un ouvrage déterminé ne peut pas être garantie. Afin que tous les candidats puissent disposer d’un réel choix on limite leur emprunt à 5 ouvrages au plus.

5.6 Commentaires sur l'utilisation de la calculatrice

AVERTISSEMENT IMPORTANT

Pour le concours 2005, les matériels disponibles sont fortement modifiés, suite à la modification de la seconde épreuve orale. Deux modèles seulement seront présentés :

Texas Instruments : Voyage 200 ; Casio : Classpad 300

Il est nécessaire que les candidats soient préparés à utiliser l’une ou l’autre de ces deux machines.

Un certain nombre de sujets de première épreuve comportent une mention invitant les candidats à illustrer leur exposé par un ou des exemples nécessitant l’usage d’une calculatrice. Un nombre important des dossiers de seconde épreuve comportent une mention de nature impérative (« pour l’un au moins des exercices proposés, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice »).

Une enquête a été menée pendant les épreuves orales de la session 2004, d’où ressortent les résultats approximatifs suivants :

-pour la première épreuve (exposé) environ 15% des candidats ont utilisé une calculatrice.
-pour la seconde épreuve (dossier) environ 36% des candidats ont utilisé une calculatrice.

En 2003, les pourcentages correspondants étaient respectivement 9% et 21%

Depuis la session 2001, les candidats ont la possibilité de projeter l’écran de la calculatrice qu’ils utilisent, comme ils le feraient devant une classe, par l’intermédiaire de tablettes.

-pour la première épreuve (exposé) environ 12% des candidats ont utilisé ces dispositifs.
-pour la seconde épreuve (dossier) environ 28% des candidats ont utilisé ces dispositifs.

En 2003, les pourcentages correspondants étaient respectivement 7% et 13%

L’évolution constatée cette année est significative, et témoigne des efforts fournis par le jury aussi bien que par les préparateurs et les candidats. Cette évolution vers la prise en compte plus importante des TICE dans le concours est rendue possible par la générosité des trois constructeurs présents Texas Instruments, Casio et Hewlett Packard, qui prêtent gracieusement du matériel en quantité suffisante.

L’appréciation par le jury de l’usage des calculatrices –avec ou sans rétroprojection – met en évidence que, si souvent cet usage n’apporte pas de valeur ajoutée à la prestation du candidat (il s’agit par exemple de l’usage de la calculatrice à de simples fins opératoires), les utilisations à but pédagogique pertinent, et les démonstrations brillantes, deviennent nettement plus nombreuses d’année en année. L’ensemble de ces pourcentages, pourcentages encore minoritaires, doit être apprécié en fonction du fait que de nombreux sujets n’appellent pas particulièrement une illustration au moyen des calculatrices, ce qui minore évidemment les résultats d’une telle enquête.

Certains candidats qui n’ont pas la maîtrise suffisante d’un modèle de calculatrice permettant une démonstration à but pédagogique indiquent qu’ils possèdent une certaine maîtrise de l’outil ordinateur ; ce peut notamment être le cas pour des étudiants ayant reçu une formation à un logiciel de calcul formel pendant leurs années initiales de formation post-baccalauréat. Les candidats et futurs candidats au CAPES externe de mathématiques doivent prendre en compte le fait que, pour le moment, l’aptitude à utiliser les TICE n’y est évaluée qu’à travers l’usage des calculatrices scientifiques, et que lors de la prochaine session, il y aura de grands changements dans le système de prêt : deux modèles seulement seront proposés (*voir infra*). Ces modèles contiennent tous deux les fonctions attendues dans les programmes : tableur et logiciel de géométrie ; ils contiennent aussi des fonctions de calcul formel.

Les conditions de rétroprojection restent spartiates, malgré l’aide du S.I.E.C. qui a obligeamment mis à notre disposition le nombre de projecteurs souhaités. En effet, les salles sont généralement dépourvues d’écrans déroulables et l’obturation de leurs fenêtres est très inégale. Néanmoins chaque commission a fait de son mieux pour installer les appareils de manière à pouvoir évaluer convenablement les prestations des candidats sur ce point, en faisant naturellement abstraction de la qualité technique de la projection.

II. ÉNONCÉS ET ANALYSE DES ÉPREUVES ÉCRITES

1. Énoncé de la première épreuve

Objectifs et notations

Ce problème propose essentiellement l'étude de deux définitions classiques de la fonction exponentielle. La première partie établit des résultats fondamentaux qui seront utilisés dans les deux parties suivantes, mais à l'exception de la toute dernière question, la deuxième et la troisième partie sont totalement indépendantes.

Les candidats sont invités à lire soigneusement les en-têtes de chaque partie et à se conformer strictement aux exigences qui y sont formulées. Toute solution ne respectant pas ces exigences sera rejetée.

Certaines questions comportent des indications ou des suggestions de solutions. Les candidats peuvent bien sûr ne pas en tenir compte et proposer des solutions personnelles.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ et $\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \smallsetminus \{0,1\}$.

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, et $\mathbb{R}^{*+}$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

E désigne l'application usuelle *partie entière*.

n désignant un entier naturel non nul, on appelle n-uplet de réels un élément du produit cartésien $\mathbb{R}^n$.

L'écriture $(u_n)_{n\geqslant 1}$ désigne une suite indexée par $\mathbb{N}^*$, de terme général u_n et si a désigne un réel positif, $(u_n)_{n>a}$ désigne une suite indexée à partir du premier entier strictement supérieur à a et de terme général u_n. Dans certaines questions, l'indexation de la suite ne sera pas précisée et la notation (u_n) utilisée.

Partie A : Quelques résultats fondamentaux

Le but de cette partie est essentiellement la démonstration d'inégalités qui seront utilisées dans les parties suivantes, au service de constructions de l'exponentielle. On s' interdit donc tout emploi de propriétés de la fonction exponentielle exp*, de la fonction logarithme* ln *et des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel.*

Par contre, les propriétés des fonctions puissances à exposant rationnel sont supposées connues.

L'inégalité de Bernoulli

Il s'agit de l'inégalité suivante :

pour tout réel a strictement supérieur à -1 et tout entier naturel n appartenant à $\widehat{\mathbb{N}}$,
$(1+a)^n \geqslant 1 + n\,a$ avec égalité si et seulement si $a = 0$

Démontrer cette inégalité de deux manières différentes, par des méthodes élémentaires. On étudiera le cas d'égalité.

Suggestion : Une méthode possible est de poser $x = 1 + a$ et d'utiliser une factorisation.

L'inégalité de Cauchy

Il s'agit de l'inégalité suivante :

pour tout entier naturel non nul n, pour tout n-uplet de réels strictement positifs $(x_1, \cdots, x_n)$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \text{ avec égalité si et seulement si } x_1 = \cdots = x_n$$

encore appelée inégalité de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique.

1. Démontrer l'inégalité dans le cas particulier $n = 2$. On étudiera le cas d'égalité.

2. La première démonstration proposée du cas général est due à Cauchy lui-même.

2.1. Soit $\mathbb{A}$ une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} i) & 1 \in \mathbb{A} \\ ii) & \forall n \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{A} \Rightarrow 2n \in \mathbb{A} \\ iii) & \forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in \mathbb{A} \Rightarrow n \in \mathbb{A} \end{cases}$$

Démontrer que $\mathbb{A} = \mathbb{N}^*$

Indication : on pourra commencer par démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \in \mathbb{A}$.

2.2. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

Indication : pour le passage de n à $2n$, on pourra utiliser le cas $n = 2$ et pour le passage de $n+1$ à n, on pourra généraliser l'égalité : $\dfrac{a+b+\frac{a+b}{2}}{3} = \dfrac{a+b}{2}$.

3. Deuxième démonstration : soit n un entier naturel non nul, et $(x_1, \cdots, x_n)$ un n-uplet de réels strictement positifs supposés pas tous égaux. On définit une application ϕ de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ en posant $\phi(t) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left[x_k + \frac{t}{n}\sum_{h=1}^{n}(x_h - x_k)\right]$.

3.1. Justifier que, pour tout $t \in [0,1]$, $\phi(t) > 0$.

3.2. Démontrer que ϕ est strictement croissante sur $[0,1]$.

Indication : Utiliser $\left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)'$.

3.3. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

4. La troisième démonstration est plus élaborée (on signale aux candidats que sa recherche n'a aucune incidence sur la suite du problème). Elle repose sur les trois idées suivantes :

4.1. Si les x_k ne sont pas tous égaux, alors soient $m = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$ et $M = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$. On a donc $m < M$; si dans le n-uplet $(x_1, \cdots, x_n)$ on remplace m et M par $\frac{m+M}{2}$, on obtient un n-uplet différent dont la moyenne arithmétique est la même, et la moyenne géométrique est strictement plus grande.

4.2. L'inégalité de Cauchy dans le cas général se déduit de l'inégalité obtenue dans le cas particulier où on suppose que les x_k vérifient de plus l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

4.3. L'application $\psi\ :\ (x_1, \cdots, x_{n-1}) \mapsto \left(1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right)\prod_{k=1}^{n-1} x_k$ possède un maximum sur l'ensemble Ω des $(n-1)$-uplets vérifiant $x_1 > 0, \cdots, x_{n-1} > 0, \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k < 1$ atteint uniquement en $\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$.

Démontrer ces trois propriétés, sans faire appel au calcul différentiel à plusieurs variables.

Indication : pour la propriété 3), on pourra commencer par démontrer que le maximum de ψ existe sur l'adhérence de Ω.

5. En déduire l'inégalité de Cauchy et son cas d'égalité.

Un calcul d'intégrale

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une application de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$, continue par morceaux sur $[a,b]$. Soit F une application de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$. On suppose que f et F satisfont à la condition suivante :

$$\text{pour tout } (x,y) \in [a,b]^2,\ F(y) - F(x) \geqslant (y-x)f(x)$$

1. Démontrer que f est croissante sur $[a,b]$.

2. Démontrer que F est convexe sur $[a,b]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que, si $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)f(a_k) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)f(a_{k+1})$$

4. En déduire que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Continuité des applications convexes

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, convexe sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer l'inégalité dite *des pentes* : pour tous réels a, b, c, si $a < b < c$ alors :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Indication : on pourra étudier les limites à droite et à gauche en x_0 arbitraire.

Partie B : Étude de la fonction exponentielle

Comme application des inégalités fondamentales de la partie A, on se propose de construire « à partir de rien » la fonction exponentielle.
On s'interdit donc, dans cette partie, *tout emploi de propriétés de la fonction exponentielle* exp, *de la fonction logarithme* ln, *et par voie de conséquence des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel, à moins qu'elles n'aient préalablement été redémontrées.*
Cette partie fait un usage intensif des inégalités de la partie A, en particulier de l'inégalité de Bernoulli.

1. Soit x un nombre réel fixé ; on note, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, et pour tout entier $n > |x|$, $v_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

1.1. Démontrer que la suite $\big(u_n(x)\big)_{n>|x|}$ est croissante.

Suggestion : Une méthode est de partir de l'égalité
$$1 + \sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{x}{n}\right) = (n+1)\left[1 + \frac{x}{n+1}\right]$$

1.2. En déduire que la suite $\big(v_n(x)\big)_{n>|x|}$ est décroissante.

1.3. Démontrer que les suites $\big(u_n(x)\big)_{n>|x|}$ et $\big(v_n(x)\big)_{n>|x|}$ sont convergentes et ont la même limite.

Indication : Démontrer que $v_n(x) - u_n(x) \leqslant v_n(x)\frac{x^2}{n}$.

2. On note $\boldsymbol{e}$ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui, à un réel x, associe la limite commune des suites de la question précédente.

2.1. Soient a, b deux réels, a strictement inférieur à b.
Démontrer que la convergence de la suite d'applications $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est uniforme sur $[a, b]$. Que peut-on en déduire pour l'application $\boldsymbol{e}$?

2.2. Démontrer que, pour tout réel x, $1 + x \leqslant \boldsymbol{e}(x)$ et, pour tout réel x strictement inférieur à 1, $\boldsymbol{e}(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

2.3.

2.3.1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{e}(x)$ est non nul et exprimer son inverse à l'aide de $\boldsymbol{e}$.

2.3.2. Soit (ε_n) une suite de nombres réels convergente vers 0. Démontrer que la suite $\left(\left(1 + \dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)^n\right)$ converge vers 1.

2.3.3. En déduire que, pour tous x, y réels, on a : $\boldsymbol{e}(x+y)\boldsymbol{e}(-x)\boldsymbol{e}(-y) = 1$.

2.4. Énumérer les propriétés *usuelles* de la fonction exponentielle et démontrer que l'application $\boldsymbol{e}$ possède bien chacune de ces propriétés. (Propriétés usuelles est à comprendre ici comme propriétés enseignées dans les classes de lycée).

2.5. On pose $\mathrm{e} = \boldsymbol{e}(1)$. Déterminer la valeur décimale approchée par défaut de e à 10^{-1} près. On se gardera bien sûr d'utiliser la touche d'exponentiation ^ ou x^y des calculatrices car elle fait en général appel aux fonctions ln et exp. Toutes les explications utiles sur les moyens de calcul mis en oeuvre pour cette détermination seront fournies.

2.6. Expliquer pourquoi les suites $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$ et $\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}\right)$ sont mal adaptées au calcul numérique de valeurs approchées de e.

3. On va voir que la définition précédente de $\boldsymbol{e}$ peut être étendue aux nombres complexes.

3.1. Soit z un nombre complexe, et n un entier naturel non nul. Démontrer que

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(n)\frac{z^k}{k!} \quad \text{où on a posé : } a_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \text{ ou } 1 \\ \displaystyle\prod_{h=1}^{k-1}\left(1-\frac{h}{n}\right) & \text{si } 1<k\leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3.2. En déduire que, pour tout complexe z, et tous entiers naturels non nuls n, m

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - \left(1+\frac{z}{m}\right)^m\right| \leqslant \left|\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n - \left(1+\frac{|z|}{m}\right)^m\right|$$

Indication : on pourra commencer par observer qu'à k fixé, la suite $n \mapsto a_k(n)$ est croissante.

3.3. En déduire, pour tout nombre complexe z, la convergence de la suite de nombres complexes $\left(\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$.

Partie C : L'exponentielle $\mathbb{R}$-solution de $y' = y, y(0) = 1$

Dans cette partie, on propose à nouveau une étude ex nihilo de la fonction exponentielle ; on s'interdit donc encore tout usage de exp, *de* ln, *et des fonctions puissances dans le cas d'un exposant non rationnel. Est aussi exclu tout emploi de la théorie des équations différentielles linéaires, a fortiori tout théorème d'existence et d'unicité de type Cauchy-Lipschitz ainsi que toute référence aux résultats de la partie précédente.*

Par contre, on utilise librement les résultats de la première partie, en particulier ceux des questions III et IV.

Soient k et a deux réels, k non nul. Il s'agit de démontrer que le problème

$$\mathsf{PC}_{k,a} \quad \begin{cases} y' = k\,y \\ y(0) = a \end{cases}$$

possède une unique $\mathbb{R}$-solution, et que cette unique solution s'exprime simplement en fonction de la solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

On appelle $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ toute application ϕ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que, $\phi(0) = a$ et pour tout réel x, $\phi'(x) = k\,\phi(x)$.

1. Quelle relation existe-t-il entre les $\mathbb{R}$-solutions éventuelles du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ et celles du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$?

2. Soit a un réel quelconque et ϕ une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Démontrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

i) ϕ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,a}$

ii) $\begin{cases} \phi \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \text{pour tout réel } x \ \phi(x) = a + \displaystyle\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$

3. On démontre dans cette question l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

3.1. Quel lien y-a-t-il entre l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ et celle pour le problème $\mathsf{PC}_{1,0}$?

3.2. Soient ϕ une $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,0}$ et T un réel fixé. Démontrer qu'il existe un réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout x entre 0 et T, $|\phi(x)| \leqslant M\frac{|x|^n}{n!}$. Que peut-on en déduire pour ϕ ?

Indication : On pourra traiter séparément les cas T positif et T négatif.

3.3. En déduire l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

On va maintenant démontrer l'existence d'une $\mathbb{R}$-solution pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.
Dans toute la suite, h désigne un réel strictement positif.

4. On définit une application ψ_h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par les deux conditions suivantes :
– pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\psi_h(n\,h) = (1+h)^n$;

– pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la restriction de ψ_h à $[n\,h\,;(n+1)\,h]$ est affine.

4.1. Construire dans le même repère les représentations graphiques de ψ_h sur $[-1,2]$ pour $h=1$ et $h=\frac{1}{2}$. On prendra 4 cm comme unité en abscisse et 2 cm en ordonnée.

4.2. Expliquer l'origine graphique de la définition de ψ_h et son lien avec le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$. On se contentera de fournir cette explication pour des réels positifs.

5. On obtient dans cette question quelques propriétés utiles de ψ_h qui seront utilisées dans la suite.

5.1. Démontrer que, pour tout réel x, $\psi_h(x) = (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}\left(1+x-h\ \mathsf{E}\left(\dfrac{x}{h}\right)\right)$.

5.2. Démontrer que, pour tout réel x, on a : $\psi_h(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\ \mathrm{d}t$.

> Indication : on pourra d'abord, pour x et y appartenant à l'intervalle $[n\,h,(n+1)\,h]$, exprimer $\psi_h(y)-\psi_h(x)$ à l'aide d'une intégrale.

5.3. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\text{pour tout } (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ \psi_h(y)-\psi_h(x) \geqslant (y-x)\big(1+h\big)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}$$

5.4. Donner une interprétation graphique de cette inégalité.

5.5. En déduire que ψ_h est croissante et convexe sur $\mathbb{R}$.

6. On supppose dans cette question que x est un réel strictement positif.
On va démontrer l'existence de la limite $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \psi_h(x)$.

Pour cela, on introduit les deux applications α_x et β_x de $]0,x]$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$\alpha_x(h) = \psi_h(x) \text{ et } \beta_x(h) = \psi_h\left[x(1+h)\right]$$

6.1. Construire, à l'aide de la calculatrice, un échantillon de représentations graphiques des applications α_x et β_x (pour des x fixés à choisir et h variant entre 0 et x). Quelles conjectures peut-on faire sur les propriétés de ces applications ?

6.2. Déterminer le sens des variations de α_x sur $]0,x]$.

> Indication : on pourra commencer par prouver que α_x est dérivable sur chaque $\left]\frac{x}{p+1},\frac{x}{p}\right[$, p entier positif non nul, puis démontrer la continuité de α_x sur $]0,x]$.

De façon similaire, on démontre que β_x est croissante sur $]0,x]$. Cette propriété sera admise pour la suite.

6.3. En déduire que, pour tout réel h appartenant à $]0,x]$, on a $\alpha_x(h) \leqslant \beta_x(x)$.

6.4. Conclure.

On démontre par un procédé similaire l'existence de $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \psi_h(x)$ dans le cas où x est strictement négatif. Dans la suite, on admettra ce résultat. Le cas $x=0$ est banal.

7. On définit donc une application $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ en posant $\boldsymbol{\mathcal{E}}(x) = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \psi_h(x)$. Il reste à démontrer que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

7.1. Quelles sont les propriétés de ψ_h qui sont conservées par le passage à la limite sur h ?

7.2. Démontrer que, pour tous x,y réels, on a $\boldsymbol{\mathcal{E}}(y)-\boldsymbol{\mathcal{E}}(x) \geqslant (y-x)\boldsymbol{\mathcal{E}}(x)$.

7.3. En déduire l'existence d'une solution pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

8. On revient au problème $\mathsf{PC}_{k,a}$.

8.1. Démontrer que le problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ possède une unique $\mathbb{R}$-solution que l'on explicitera en fonction de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

8.2. En déduire que $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ satisfait à la propriété fonctionnelle fondamentale de la fonction exponentielle.

9. Dans cette question, on utilise les résultats de la partie B.
Démontrer que $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{e}$.

2. Analyse de la première épreuve

Épreuve d'analyse : rapport

Commentaires généraux

Le sujet d'analyse de cette année était volontairement recentré sur des contenus très proches des programmes de lycée et, à dire vrai, l'essentiel de l'épreuve relève au plus du niveau bac + 1 : réels, suites et fonctions, inégalités, convergences et limites, équations différentielles. Il apparaît que ce recentrage n'a pas permis aux candidats de mieux exprimer leurs compétences mathématiques. Tout semble se passer comme si les performances des candidats étaient indépendantes du niveau des contenus.

Malgré la présence d'excellentes copies, cette observation inquiétante doit aussi être interprétée *in fine* comme le produit de la formation mathématique proposée au collège, au lycée, et à l'université. Un certain nombre de domaines dans lesquelles les faiblesses des candidats sont criantes (logique et inégalités pour n'en citer que deux) ont figuré naguère en bonne place au programme des lycées. L'élimination systématique des programmes du *difficile* ne semble vraiment pas une stratégie payante ; rien ne peut remplacer un apprentissage sur la durée.

Rappelons d'abord qu'une épreuve écrite doit permettre au jury de sélectionner les candidats possédant :

- Un minimum de connaissances *précises* et de savoir-faire bien au point : des définitions, des théorèmes, des méthodes ... mais pas seulement ; un travail de réflexion sur les énoncés et l'organisation globale de la discipline mathématique doit avoir été engagé.

  Ainsi, étudier les variations d'une fonction ne consiste pas à dessiner des flèches qui montent et qui descendent dans un tableau. Ce serait réduire à son pur aspect procédural un savoir très savant – les théorèmes de Lagrange – qui, au contraire mérite d'être *montré* ; ce qui est acceptable pour un bachelier ne l'est pas forcément à bac + 4 !

- La capacité de rédiger des démonstrations intelligibles et conformes aux exigences de la communauté scientifique actuelle, ce qui suppose d'avoir un peu réfléchi aux différentes fonctions d'une démonstration, au fonctionnement du langage mathématique, aux divers statuts des lettres que ce langage manipule, au rôle de la logique des propositions et à celui des quantificateurs.

  Ainsi, il n'est pas acceptable à ce niveau de confondre les objets u_n, $u_n(x)$, et $(u_n(x))_{n>|x|}$ et plus généralement de manipuler des lettres formellement sans avoir le souci constant de gérer *dans le déroulement du raisonnement* le champ d'icelles.

  Ainsi, il n'est pas suffisant de produire des démonstrations logiquement correctes ; les productions des candidats abondent de ratiocinations et de « démonstrations par équivalence en partant de la conclusion » se concluant par un triomphant « toujours vrai » marques d'un manque de recul certain sur leurs pratiques.

- Un minimum d'honnêteté intellectuelle (ou peut-être tout simplement de clairvoyance) pour éviter de sortir d'une impasse par un « donc » péremptoire qui ne saurait abuser le jury. Clairvoyance et réflexion sur la discipline encore, pour juger de ce qui mérite de figurer dans une rédaction : à quoi rime de produire un demi-page de déductions collégiennes laborieuses pour obtenir la minoration $1 - \frac{n-1}{n}\,t > 0$ ($n \geq 1$ et $t \in [0,1]$) et par contre, deux lignes plus loin, de ne pas dire un mot sur la propriété non triviale (dans le contexte de l'énoncé) permettant de passer de $a < b^n$ à $a^{\frac{1}{n}} < b$?
- Une certaine maturité sur les concepts qu'ils seront amener à enseigner, en particulier —au coeur de l'analyse— l'infini et son intervention dans les limites, la dérivation, l'intégration. Certes un candidat au capes n'est pas encore un enseignant chevronné mais ce ne doit plus être un élève focalisé sur le *comment.*

  Par exemple, il n'est pas acceptable de voir manipuler des guirlandes de $\lim\limits_{n\to\infty}$ sans que ne soit jamais soulevée la question de l'existence, par exemple il est assez inquiétant (en mathématiques standard) de voir des candidats écrire $f'(x) = \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ en précisant « avec y assez proche de x », ou encore $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \sum_{k=0}^{n-1} ...$ « pour n assez grand ».

- Éventuellement un peu d'inventivité ou d'imagination face à des questions modestement ouvertes. Cela passe, entre autres choses, par une certaine aptitude pour l'une des grandes affaires de l'enseignement des mathématiques : la *reconnaissance de formes.* Cette qualité, comme les autres, peut s'acquérir.

Et il faut bien sûr ajouter — comme si ce n'était pas évident a priori — l'impératif d'avoir fait sienne l'exigence de qualité des productions fournies, en particulier le respect de l'orthographe. Le jury n'a pas vocation à rechercher les points sous les ratures.

L'écrit du capes externe est donc une épreuve globalement très exigeante ; il ne suffit pas d'avoir suivi paisiblement un cursus universitaire (ou autre) pour l'affronter valablement ; elle doit être préparée minutieusement et sur le long terme. Le travail méthodique sur les épreuves antérieures (et les rapports du jury...) est un indispensable début. Ceci permettra au moins d'acquérir une certaine habilité à gérer correctement son temps.

Les deux constructions de l'exponentielle proposées ont été étoffées un peu artificiellement pour mieux couvrir le programme d'analyse. Pour l'approche par les suites, seule l'inégalité de Bernoulli est utile et permet de prouver l'adjacence des suites et d'obtenir *toutes* les propriétés de l'exponentielle. Pour l'approche par les équations différentielles et la méthode d'Euler, la difficulté est d'obtenir la continuité de la limite. Pour éviter de faire appel à des résultats d'analyse trop savants (théorèmes de Dini, ou suite de fonctions lipschitziennes), on a choisi de passer par la convexité.

Pour terminer ces préliminaires, signalons que, malgré les avertissements des en-têtes de chaque partie, quelques candidats n'ont pas résisté à l'appel du logarithme ou de l'exponentielle...

Partie A : Quelques résultats fondamentaux

Cette première partie, seule partie abordée par tous les candidats, n'a été que très rarement traitée correctement de façon substantielle. Il est très significatif qu'un nombre infime de candidats obtient la totalité des points à la première question.

Deux références majeures sur les inégalités :
– G. HARDY, J.E. LITTLEWOOD, G. POLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press ; rééd 1991.
– E.F. BECKENBACH, R. BELLMAN, *Inequalities*, Springer-Verlag, 1983.
Pour un usage fin d'inégalités à la Bernoulli (et pour se préparer de la plus utile des façons), on pourra consulter :
C.HOUZEL, *Analyse mathématique*, Belin, 1996.

L'inégalité de Bernoulli

On peut proposer, pour gérer systématiquement le cas d'égalité, de démontrer que, si $a = 0$ il y a égalité et sinon, il y a inégalité stricte. Il est aussi possible de gérer le cas d'égalité dans chaque démonstration particulière. Par contre, se contenter de vérifier que si $a = 0$, il y a égalité n'est pas suffisant.

Comme idées de démonstrations élémentaires, on pouvait proposer :

1. En posant $x = 1 + a$, on a $x > 0$ et (via une factorisation à laquelle Bernoulli a aussi laissé son nom) :

$$(1+a)^n - 1 - n\,a = x^n - 1 - n\,(x-1) = (x-1)\left[\sum_{k=0}^{n-1} x^k - n\right]$$

On peut conclure par une disjonction de cas sur x ou poursuivre la factorisation pour obtenir :

$$x^n - 1 - n\,(x-1) = (x-1)\left[\sum_{k=1}^{n-1}(x^k-1)\right] = (x-1)^2\left[\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{h=0}^{k-1} x^h\right]\ldots$$

ce qui permettrait d'améliorer l'inégalité de Bernoulli.

De nombreux candidats semblent ignorer qu'après $a^2 - b^2$, il y a aussi $a^n - b^n$.

2. Une récurrence simple sur $n \in \widehat{\mathbb{N}}$ sur l'assertion « pour tout $a \in]-1,0[\cup]0,+\infty[$, $(1+a)^n > 1 + n\,a$ ».

Solution la plus souvent proposée, (mais pas systématiquement). La bourde classique dans l'hérédité : « supposons que, pour tout $n \in \widehat{N}$... » semble en recul, mais a été remplacée par « soit $\mathcal{P}(n)$ l'assertion : " $\forall a > -1, \forall n \in \widehat{\mathbb{N}}$, $(1+a)^n \geq 1 + n\,a$ " ».

La récurrence est un des raisonnements mathématiques majeurs ; il importe de montrer au jury qu'on le maitrise ; avant d'invoquer une « récurrence évidente », la première rédaction se doit d'être complète et irréprochable. Si on regarde à la loupe les productions des candidats, c'est loin d'être le cas.

3. Une étude des variations de l'application $a \mapsto (1+a)^n - 1 - n\,a$ sur $]-1,+\infty[$ via le signe de la dérivée.

La majorité des candidats rédige ceci comme un élève de lycée : on calcule la dérivée, on cherche ses zéros, on en déduit le tableau des variations sur lequel on lit la réponse. Certains vont même jusqu'à calculer la dérivée seconde pour mieux s'immerger dans l'automathisme. Comme expérience cruciale, le jury conseille aux futurs candidats de s'exercer à rédiger le *détail* des définitions et des théorèmes utiles dans cette solution, en particulier pour gérer correctement le cas d'égalité.

Moins élémentaire, on peut encore citer :

4. L'inégalité des accroissements finis appliquée à $t \mapsto t^n$ entre 1 et x $(x > 0)$.

5. La stricte convexité de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}^*$ qui permet de situer le graphe par rapport à la tangente en 1.

6. La formule du binôme de Newton fournit une solution partielle pour le cas $a > 0$.

De nombreux candidats ont suivi cette piste mais pour parvenir à leur fin, certains sont prêts à toutes les compromissions avec la rigueur à grand renfort de « il est bien évident que ». Une issue possible pour le cas négatif était d'abandonner Newton et de distinguer $a \in]-1,-\frac{1}{2}]$ et $a \in]-\frac{1}{2},1[$.
Peut-on rappeler aussi aux candidats que les tentatives de démontrer des inégalités globales à partir d'un développement limité sont le plus souvent vouées à l'échec.

Et certainement bien d'autres, dont une via l'inégalité de Cauchy (pour le fun...).

L'inégalité de Cauchy

Dans cette partie le jury a observé une inconcevable négligence dans la manipulation des inégalités ; trop peu de candidats distinguent inégalités strictes et inégalités larges : $\geqslant$ et $>$ sont parfois employés de façon interchangeable d'une ligne à l'autre. On pourrait suggérer aux candidats de commencer par lire > 0 « strictement positif » et de se souvenir que 0 est à la fois positif et négatif. Le même commentaire vaut d'ailleurs pour le sens des variations.

Pour étudier le cas d'égalité, on peut procéder comme pour Bernoulli : si les x_k sont tous égaux, alors il y a égalité des moyennes, sinon il y a inégalité stricte. Mais vérifier l'égalité des moyennes en cas d'égalité des x_k ne suffit pas.

1. Repose sur le signe strict de $(a-b)^2$.

Un clin d'oeil géométrique : on peut aussi observer que dans un triangle rectangle ABC, si H est le pied de la hauteur issue de A et si $BH = a$, $CH = b$ (et il est toujours possible de construire un tel triangle) alors, les relations métriques dans le triangle rectangle permettent de comparer médiane et hauteur.

2. 2.1. L'indication de l'énoncé relève d'une récurrence simple. Puis en réécrivant la propriété iii) sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \notin \mathbb{A} \Rightarrow n+1 \notin \mathbb{A}$, on peut procéder par l'absurde pour montrer que $\mathbb{A} = \mathbb{N}$.

On pouvait aussi prouver directement que si $n \in \mathbb{A}$ alors $n+1 \in \mathbb{A}$.

D'abord un nombre considérable de candidats confondent nombres pairs et puissance de 2 : évidement ça simplifie le travail. Si certains ont bien compris le couplage des deux propriétés, peu sont capables de l'expliquer convenablement par exemple en français – qui est un langage tout-à-fait admissible pour une démonstration, les candidats sont invités à lire Cauchy – et presqu'aucun de formaliser sa pensée, par exemple par une récurrence descendante finie. D'assez nombreux candidats pensent pouvoir conclure avec l'étonnant argument suivant : $\mathbb{A} \subset \mathbb{N}$ et $\mathbb{A}$ équipotent à $\mathbb{N}$ impliquerait $\mathbb{A} = \mathbb{N}$.

2.2. En introduisant $\mathbb{A} = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^{*+}\right)^n, \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \geqslant \left[\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right]^{\frac{1}{n}} \text{ avec égalité ssi } x_1 = \cdots = x_n \right\}$, il s'agit de montrer que $\mathbb{A}$ vérifie les propriétés de la question précédente.

Le passage de n à $2n$ est assez souvent bien traité, par contre la généralisation de l'égalité fournie comme indication a posé des problèmes : avec $x_{n+1} = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k > 0$; on a $\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = x_{n+1}$.

Le cas d'égalité n'est presque jamais traité ; il suffisait pourtant de remarquer que si les x_k ne sont pas tous égaux, il y a inégalité stricte, et une seule inégalité stricte dans une chaîne d'inégalités suffit.

3. Si les x_k sont tous égaux, on a égalité de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique. On suppose donc les x_k non tous égaux (ce qui implique que $n \geq 2$).

3.1. Si de nombreux candidats écrivent bien — parfois très laborieusement — $x_k + \dfrac{t}{n} \displaystyle\sum_{h=1}^{n} (x_h - x_k) = (1-t)x_k + t\,A_n$ où A_n est la moyenne arithmétique des x_h, pratiquement aucun n'y voit un barycentre. La majorité démontrent d'ailleurs seulement l'inégalité large et conclut sans même s'en apercevoir à l'inégalité stricte.

3.2. On peut utiliser l'égalité fonctionnelle suivante, généralisation d'une formule bien connue, ou conséquence de la multilinéarité du produit :

$$\text{si } w = \prod_{k=1}^{n} u_k \text{ alors } w' = \sum_{h=1}^{n} u_h' \left\{ \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n} u_k \right\} \text{ donc } \frac{w'}{w} = \sum_{h=1}^{n} \frac{u_h'}{u_h}$$

d'où : $\dfrac{\phi'(t)}{\phi(t)}$ puis $\left[\dfrac{\phi'}{\phi}\right]'(t)$ en évidence négatif sur l'*intervalle* $[0,1]$.

Par contre le signe strict nécessite un argument supplémentaire rarement fourni ! Et le retour à ϕ est souvent marqué du sceau de l'à-peu-près ; on devine les choses plus qu'on ne les déduit ; il suffisait de remarquer que $\dfrac{\phi'(1)}{\phi(1)} = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{h=1}^{n} (x_h - x_k)}{\sum_{h=1}^{n} x_h} = 0$

3.3. Résulte de l'inégalité *stricte* $\phi(0) < \phi(1)$.

4. L'idée de la démonstration suivante serait due à Mac-Laurin.

4.1. L'invariance de la moyenne arithmétique résulte de l'associativité de la barycentration ; la croissance (stricte) de la moyenne géométrique résulte d'une question antérieure.

Certains candidats font observer avec raison que la substitution ne doit être faite que pour un couple de valeurs.

4.2. Très classiquement dans des problèmes homogènes, il suffit de poser : $y_k = \dfrac{x_k}{\sum\limits_{h=1}^{n} x_h} > 0$.

4.3. Cette question était assez délicate ; on introduit $K = \left\{(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1 \geqslant 0, \cdots, x_{n-1} \geqslant 0, \sum_{k=0}^{n-1} x_k \leqslant 1\right\}$. (Il n'est pas utile de démontrer que K est l'adhérence de Ω). Puis on démontre que K est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n-1}$. La continuité de l'application $\psi \ : \ (x_1, \cdots, x_{n-1}) \mapsto \left[1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right] \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} x_k$ fournit l'existence d'un maximum (global) sur le compact K. L'inégalité $\psi(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}) > 0$ montre que ce maximum est atteint dans Ω.

Soit ensuite $(a_1, \cdots, a_{n-1})$ un élément de Ω en lequel le maximum est atteint ; on démontre alors que les a_k sont tous égaux. On s'intéresse ensuite à la fonction $\psi(a, \cdots, a) = \big(1 - (n-1)\,a\big)\,a^{n-1}$ sur l'intervalle $[0,1]$ pour en déduire que $a = \frac{1}{n}$.

Il est d'ailleurs possible de démontrer que sur $]0,1[$ $\phi(x) = \big(1-(n-1)x\big)x^{n-1} \leqslant \frac{1}{n^n}$ avec égalité si et seulement si $x = \frac{1}{n}$ par voie purement algébrique, par exemple en utilisant l'inégalité de Bernoulli.

Question abordée par peu de candidats, mais qui, le plus souvent, avaient visiblement de la ressource. On ne peut que regretter ici encore une certaine négligence qui conduit à des démonstrations bâclées.

5. Déduction presque jamais traitée.

N.B. En réalité, on peut déduire Cauchy directement de Bernoulli.

Un calcul d'intégrale

1. Sans problème.

Bien traitée.

2. Avec une définition usuelle de la convexité : soient $x, y \in [a, b]$, $\lambda \in [0, 1]$ et $z = (1-\lambda)\,x + \lambda\,y$. On a : $F(x) - F(z) \geqslant (x-z)f(z)$ et $F(y) - F(z) \geqslant (y-z)f(z)$; en multipliant la première inégalité par $(1-\lambda)$ et la seconde par λ et en ajoutant, il vient ...

À l'évidence cette question a posé problème. De nombreux candidats pensent qu'une application est convexe si et seulement si sa dérivée première est croissante (resp. sa dérivée seconde est positive) et bien sûr réussissent à le prouver. La valeur absolue n'est plus une fonction usuelle. Signalons un théorème étonnant : une fonction majorant une fonction croissante est elle-même croissante. Il y a d'ailleurs des interférences fréquentes croissant/positif.

3. Presque pas de problème.

4. Puisque f est continue par morceaux donc intégrable sur $[a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f$ *existe* et comme f est croissante sur $[a, b]$, par définition de l'intégrale d'une part : $\displaystyle\int_a^b f = \sup_\sigma \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f(a_k) \right\} \leqslant F(b) - F(a)$

et d'autre part : $\displaystyle\int_a^b f = \inf_\sigma \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\, f(a_{k+1}) \right\} \geqslant F(b) - F(a)$ (sup et inf pris sur l'ensemble des subdivisions du segment $[a, b]$).

On pouvait aussi, plus élémentairement, choisir une subdivision régulière de $[a, b]$ $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ qui fait des sommes encadrantes des sommes de Riemann ; f étant continue par morceaux sur $[a, b]$, on sait que ces dernières *convergent* vers $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui permet de conclure via le théorème de passage à la limite dans les inégalités.

Remarque : l'hypothèse « f continue par morceaux » n'a été ajoutée dans l'énoncé que pour rester dans le cadre du programme du capes. Cette approche a été empruntée à Mézard et Delorme dans leur *Cours de mathématiques supérieures* paru chez PUF, ouvrage par ailleurs d'une remarquable richesse.

Les productions des candidats (assez nombreuses au demeurant sur cette question) révèlent le très grand flou qui règne dans les esprits sur le concept d'intégrale, ce qui doit interroger la filière mathématique à la fois sur l'efficacité de la formation académique des étudiants et sur la faisabilité d'un enseignement de l'intégration dans la filière S tel que voulu par les programmes.
Beaucoup conclut en faisant « tendre n vers l'infini » ce qui en soi n'a guère de sens ; et pour faire bonne mesure dans l'approximation, on fait appel au théorème d'encadrement. Pour d'autres, c'est l'invocation de « la méthode des rectangles » point, qui permet de conclure. Pour certains même, les sommes sont égales à l'aire sous la courbe ce qui explique tout.

Continuité des applications convexes

1. Classique.

Le recours – étonnamment fréquent et admis bien sûr – à la « croissance des pentes » bien que tout-à-fait correct à condition de préciser sur quoi, sonne comme une escroquerie.

2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; on introduit $b < x_0$ et $c > x_0$ quelconques ; soit enfin $h > 0$ tel que $x_0 \pm h \in [b, c]$; d'après l'inégalité des pentes, on a : $h\dfrac{f(x_0) - f(b)}{x_0 - b} \leqslant f(x_0) - f(x_0 - h) \leqslant h\dfrac{f(c) - f(x_0)}{c - x_0}$ et on peut conclure pour la limite à gauche.

Cette question a été l'occasion pour ceux qui s'y sont risqué, de bien des passages à la limite fantaisistes, y compris des tentatives de prouver que f est dérivable ; faut-il rappeler que les passages à la limite présupposent l'existence des limites ?

Partie B : Étude de la fonction exponentielle

Le traitement de cette partie a tourné au fiasco ; il s'agit pourtant pour l'essentiel de contenus qu'un document officiel récent envisage de pouvoir faire traiter aux (disons à certains) élèves de terminale.
Le plus grave est la grande confusion qui semble régner dans les esprits sur des questions voisines mais distinctes ; cette partie utilisait de façon répétée trois théorèmes élémentaires mais fondamentaux sur les suites :
– le théorème de passage à la limite dans les inégalités larges ;

– le théorème des trois suites ;
– le théorème d'unicité de la limite.

Les deux premiers sont assez proches dans leur formulation mais fondamentalement distincts ; le jury attend bien sûr des candidats qu'ils prouvent leur capacité à les distinguer.

1. 1.1. L'idée est de démontrer qu'à x réel fixé, les deux suites $\left(\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)_{n>|x|}$ et $\left(\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n}\right)_{n>|x|}$ sont adjacentes.

L'indication de l'énoncé invitait à appliquer l'inégalité de Cauchy au $(n+1)$-uplet $\big((1+\frac{x}{n}),\cdots,(1+\frac{x}{n}),1\big)$. On pouvait aussi appliquer l'inégalité de Bernoulli (en remarquant que la suite est à termes strictement positifs), mais il faut un peu tâtonner avant de trouver la forme adéquate :

$$\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\left(1+\tfrac{x}{n}\right)\left[\frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)}\right]^{n+1}\geqslant\left(1+\tfrac{x}{n}\right)[1+(n+1)\cdots]$$

Moins de 1% des candidats réussit à exploiter l'indication de l'énoncé ; beaucoup n'essayent même pas de l'utiliser et se noient dans des calculs sans direction, d'autres confondent la croissance de la suite $\big(u_n(x)\big)_{n>|x|}$ (à x fixé) et celle de l'application $x\mapsto u_n(x)$ (à n fixé). On voit même des dérivations par rapport à n.

1.2. Il suffit d'observer que, pour $n>|x|$, $u_n(-x)>0$ et $v_n(x)=\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{-n}=\dfrac{1}{u_n(-x)}$.

Question assez souvent traitée ; mais que penser de l'argument très répandu : $v_n(x)=u_{-n}(x)$ donc ... ?

1.3. Enfin, toujours à x fixé et à $n>|x|$, $v_n(x)-u_n(x)=v_n(x)\left\{1-\left[1-\dfrac{x^2}{n^2}\right]^n\right\}$ ce qui montre que, d'une part $v_n(x)-u_n(x)\geqslant 0$ et d'autre part, en utilisant l'inégalité de Bernoulli, que $v_n(x)-u_n(x)\leqslant v_n(x)\dfrac{x^2}{n}\leqslant x^2v_{n_0}(x)\dfrac{1}{n}$ où $n_0=\mathsf{E}(|x|)+1$. Donc $v_n(x)-u_n(x)=O(\frac{1}{n})$, qui converge vers 0. D'où l'adjacence.

Beaucoup trop de négligences dans cette question ; les champs pour x et n ne sont guère gérés, une simple majoration ne permet pas en général de conclure pour la convergence d'une suite, le fait que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ convergence vers 0, ne suffit pas pour qu'il en soit de même pour le produit $\left(v_n(x)\frac{1}{n}\right)$, la définition des suites adjacentes n'est pas le théorème des suites adjacentes, le théorème des trois suites n'est pas le théorème de passage à la limite dans les inégalités, etc.

Certains candidats « démontrent » que les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ convergent vers 1 avec un argument qu'on devine aisément.

2. 2.1. Soit $x\in[a,b]$; posons $c=\max\{|a|,|b|\}$, $d=\min\{|a|,|b|\}$ et $n_0=\mathsf{E}(c)+1$; d'après le théorème des suites adjacentes et la majoration précédente, on a, pour $n\geqslant n_0$:

$$0\leqslant \boldsymbol{e}(x)-u_n(x)\leqslant v_n(x)-u_n(x)\leqslant v_n(x)\tfrac{x^2}{n}\leqslant v_{n_0}(x)x^2\tfrac{1}{n}\leqslant c^2v_{n_0}(d)\tfrac{1}{n}$$

C'est une majoration uniforme (en x) qui conduit à la convergence uniforme de $(u_n)_{n>c}$ vers $\boldsymbol{e}$ sur $[a,b]$, et donc aussi celle de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Question très rarement bien traitée ; au contraire, le jury a pu constater la sérieuse incompréhension des candidats sur cette notion de la convergence uniforme, en particulier le rôle d'une majoration uniforme en x, mais pas n'importe laquelle § Ainsi certains candidats concluent à partir de $|u_n(x)|\leqslant\left(1+\frac{b}{n}\right)^n$ (qui n'est d'ailleurs pas correcte). D'autres laissent au jury le soin de deviner qu'ils ont pensé à un théorème de Dini, concevable mais à l'évidence hors de propos.

Remarque : la continuité de $\boldsymbol{e}$ peut se démontrer de façon élémentaire sans référence à la convergence uniforme (confère question 2.4.).

2.2. Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé, et soit $n_0>|x|$ (par exemple $\mathsf{E}(|x|)+1$). Comme les suites sont adjacentes, on a $u_{n_0}(x)\leqslant\boldsymbol{e}(x)\leqslant v_{n_0}(x)$. On peut alors conclure avec Bernoulli.

Le jury a systématiquement sanctionné les candidats encadrant $\boldsymbol{e}(x)$ par $u_1(x)$ et $v_1(x)$. Ici, la non-gestion des variables n et x ne pardonnait pas.

Ces inégalités jouent un rôle fondamentale dans les propriétés de l'exponentielle. Par symétrie elles donneront ensuite les non moins utiles $\frac{x-1}{x}\leqslant\ln(x)\leqslant x-1$.

2.3.

2.3.1. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n>|x|$; on a $u_n(x)v_n(-x)=1$; donc par passage à la limite...

Il suffisait de bien connaître la *définition* de l'inverse d'un nombre.

Beaucoup de candidats exploitent aussi l'encadrement de la question précédente.

2.3.2. $\left(\dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)$ converge vers 0, donc $\left|\frac{\varepsilon_n}{n}\right|<1$ à partir d'un certain rang ; donc l'inégalité de Bernoulli fournit la minoration, à partir de ce rang : $\left(1+\dfrac{\varepsilon_n}{n}\right)^n\geqslant 1+\varepsilon_n$. On a par ailleurs la majoration, à partir du même rang : $\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n\leqslant\boldsymbol{e}(\varepsilon_n)\leqslant\frac{1}{1-\varepsilon_n}$.

Les candidats savants pouvaient aussi utiliser la convergence uniforme.

Beaucoup de négligences à signaler sur la gestion de la variable n ; l'encadrement de $\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n$ n'est pas valide pour tout n. Via un découplage stupéfiant à ce niveau, des candidats écrivent $\lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon_n/n)^n = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{e}(\varepsilon_n) = \boldsymbol{e}(0)$ (ce qui est d'ailleurs parfaitement exact !).

Signalons aussi la prégnance chez certains du célèbre théorème-élève $1+\frac{\varepsilon}{n} \sim 1$ donc $\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n \sim 1^n = 1$.

2.3.3. On gère les variables : soient x, y réels, et $n > \max\{|x|, |y|, |x+y|\}$; puis on observe que $u_n(x+y)u_n(-x)u_n(-y)$ est de la forme $\left(1+\frac{\varepsilon_n}{n}\right)^n$; l'unicité de la limite fournit l'égalité demandée.

2.4. Il y a de nombreuses façons de procéder – selon l'ordre d'énonciation des propriétés – en particulier, on peut très classiquement s'appuyer sur la relation fonctionnelle de l'exponentielle, dont on sait que couplée à la continuité en 0, elle est caractéristique.

De façon très surprenante, le jury constate que cette question n'a quasiment pas été traitée ; l'exponentielle est pourtant au programme de toutes les sections ! Le plus souvent les candidats se contentent d'énumérer deux ou trois propriétés de l'exponentielle (typiquement $\boldsymbol{e}(0) = 1$), sans même toujours reprendre celles figurant dans l'énoncé, ni même le titre de la partie C. 5% des points du barème ont été attribué à cette question.

2.5. La situation est presqu'idéale pour du calcul numérique ; on dispose d'un encadrement du réel à approcher par deux suites « calculables ». On peut imaginer au moins deux types d'algorithme : une boucle tant que ou une boucle pour.

On commence par gérer l'erreur de méthode : les inégalités obtenues à la question 2.1 donnent avec $x = 1$: $0 \leqslant \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\frac{1}{n} < \frac{3}{n}$ si $n \geqslant 10$ puisque $(1-1/10)^{-10} = \frac{10000000000}{3486784401} < 3$; donc, pour que $\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{2}10^{-1}$, il suffit que $\frac{3}{n} \leqslant \frac{1}{2}10^{-1}$; $n = 60$ convient. $\left(1+\frac{1}{60}\right)^{60}$ est donc une valeur approchée (rationnelle) par défaut de e à $\frac{1}{2}10^{-1}$ près.

On s'occupe ensuite de l'erreur de troncature : les rationnels ne sont pas (en général) représentés exactement en machine. Faisons l'hypothèse que la précision de calcul des calculatrices est suffisamment grande pour « faire confiance » au moins aux deux premières décimales des flottants affichés (en les supposant non nulles, sinon il faudrait regarder la suivante).

Pour les calculs visés, cette hypothèse est raisonnable, car l'erreur relative sur un calcul de puissance entière x^n par multiplications successives (pour un x non représentable exactement en machine) peut être estimée par : $\delta(x^n) \approx n\delta(x)$; avec $n = 60$, $x = \frac{61}{60} \approx 1$ et comme $\delta(x) < \epsilon$ (*epsilon machine*, au moins 10^{-10} sur les matériels courants), on a raisonnablement $\delta(x^n) < 10^{-8}$ et donc certainement $\Delta(x^n) < 10^{-7}$. (Pour être plus précis, il faudrait connaître l'arithmétique du calculateur utilisé.)

Pour calculer $\left(\frac{61}{60}\right)^{60}$ sans exponentiation machine, on peut utiliser un algorithme itératif, facile à programmer sur les matériels courants :

```
a ← 61/60
p ← 1
pour k de 1 à 60
faire
        p ← p × a
finfaire
```

On obtient alors $\left(1+\frac{1}{60}\right)^{60} = 2,69...$

On en déduit que $2,69 < \mathrm{e} < 2,75$ ce qui ne permet pas de trancher entre $2,6$ et $2,7$ pour la valeur décimale approchée par défaut à 10^{-1} près. Il faut donc aller plus loin dans la suite $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour conclure.

La minoration $\left(1+\frac{1}{74}\right)^{74} < \mathrm{e}$ donne : $2,70 < \mathrm{e}$ qui permet d'en déduire que la valeur décimale approchée par défaut à 10^{-1} près de e est $2,7$.

Plus de 20 ans après l'introduction des calculatrices dans l'enseignement, les questions de calcul numérique sont toujours boudées par les candidats. Les rares qui s'y risquent ne fournissent guère d'explications satisfaisantes – mais savent-ils quoi dire ? – et certaines réponses sont même fausses !

Sur ce point aussi, la filière, en particulier sa composante de l'enseignement supérieur, doit s'interroger sur son incapacité à former des utilisateurs un tant soit peu avertis de ce qui ne semble plus être qu'un objet de consommation.

2.6. L'encadrement $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ est mal adapté au calcul numérique car, d'une part sa vitesse de convergence vers 0 est trop faible. De façon précise, il est classique de montrer qu'elle est en $\frac{1}{n}$ (on dispose de toutes les propriétés de l'exponentielle pour ce faire !). C'est ce qu'on appelle des convergences logarithmiques. D'autre part, le calcul de x^n avec n grand et x proche de 1 est numériquement très instable ; si x est trop proche de 1, il sera arrondi à 1,0 (phénomène d'absorption) et le résultat du calcul sera 1,0.

La question était très ouverte ce qui ne facilitait pas le travail des candidats ; il va de soi que le jury attendait une analyse plus poussée qu'un minuscule « parce que la convergence est trop lente » .

3. 3.1. Il importe de noter que la somme est une somme finie. Il n'y a donc pas de problème de convergence.

Question fermée simple, reposant sur la formule du binôme ; il suffit d'être méticuleux. Question bien traitée quand elle est abordée.

3.2. Question assez simple, l'énoncé donne l'information utile qui se prouve sans problème.

3.3. Les questions précédentes permettent de montrer que la suite $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy ; $\mathbb{C}$ étant complet, elle est convergente.

Partie C : L'exponentielle $\mathbb{R}$-solution de $y' = y, y(0) = 1$

1. Si $a \neq 0$ alors ϕ et $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ si et seulement si $\psi = x \mapsto a\phi(k\,x)$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$.

Si $a = 0$, ϕ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,0}$ si et seulement si $\psi = x \mapsto \phi(k\,x)$ est solution du problème $\mathsf{PC}_{k,0}$.

Ceci résulte simplement du théorème de dérivation d'une application composée et de la relation valable pour tout x, $\psi'(x) = k\,a\phi'(k\,x)$

Cette question a donné lieu aux réponses les plus fantaisistes, grossièrement fausses. Un candidat propose même $\psi(x) = k\,\phi(x)$ pour tout x *et* $\psi(0) = a\,\phi(0)$; peu de candidats semble avoir eu l'idée de résoudre les deux problèmes (avec des bonnes exponentielles) pour au moins conjecturer une relation correcte. Et ceux qui l'ont fait, ont écrit $\mathrm{e}^{k\,x} = \left(\mathrm{e}^{x}\right)^{k}$ ce qui introduit un exposant réel...

Notons que, pour des physiciens, la question est banale car, d'une part ils écriraient sans état d'âme $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,x} = k\,y$ équivaut à $\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,(k\,x)} = y$, ce qui, couplé au principe de superposition des solutions dans un problème linéaire, fournit le résultat. D'autre part, bien plus fondamentalement, l'adimensionnalisation du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ conduit au problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ (en posant $x^* = k\,x$ et $y^* = \frac{y}{a}$ relations obtenues par une analyse dimensionnelle de l'équation).

2. Question très simple dont l'objectif est de transformer un problème de Cauchy en une équation intégrale.

Question assez souvent traitée, pas toujours avec la rigueur souhaitable. La solution utilisant le théorème fondamental du calcul intégral, le jury souhaitait le voir évoqué. Par ailleurs les $\phi(x)'$ pullulent et l'erreur bien classique $\left(\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}\,t\right)' = \phi(x) - \phi(0)$ (sic) toujours présente. On trouve aussi quelques « continue implique dérivable ».

3. **3.1.** La clef est la linéarité des problèmes PC ; si ϕ_1 et ϕ_2 sont $\mathbb{R}$-solutions du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$, alors $\phi_1 - \phi_2$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,0}$. Par ailleurs, la fonction nulle est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,0}$. L'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,0}$ implique donc l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$. (La réciproque est vraie, mais pas utile pour la suite.)

L'examen des productions des candidats montre qu'à l'évidence ils n'ont pas conscience du rôle de la linéarité dans les questions d'unicité ; rappelons que pour le problème linéaire général, disons $f(x) = b$ avec des notations générales évidentes, $\ker f = \{0\}$ est une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de f laquelle a à voir avec le « au plus une solution ».

3.2. Démonstration classique d'unicité pour une équation différentielle linéaire. Une récurrence simple permet d'obtenir la majoration et un passage à la limite la nullité de ϕ entre 0 et T.

Question très rarement abordée. Quelques candidats s'en sortent en faisant appel à l'inégalité de Taylor-Lagrange, ce qui est tout-à-fait correct mais un peu hors de propos.

3.3. La question précédente prouve l'unicité pour le problème $\mathsf{PC}_{1,0}$; celle pour le problème $\mathsf{PC}_{1,1}$ en découle.

4. **4.1.** Le jury rappelle que le tracé d'une représentation graphique est une activité mathématique comme une autre et que cette question n'était pas sous-notée, à condition d'y apporter un minimum de soin.
Signalons quand même de nombreuses erreurs de tracé !

Toute la suite du problème n'est abordée qu'exceptionnellement, le plus souvent de façon très superficielle, les candidats n'ayant guère eu le temps de rentrer dans la partie. Nous donnons quelques éléments de correction. Quand bien même l'ensemble a une certaine épaisseur, chaque question reste élémentaire.

4.2. L'application ψ_h est obtenue en appliquant la méthode d'approximation d'Euler pour une équation différentielle avec un pas h, la différence étant ici qu'on travaille sur $\mathbb{R}$ tout entier et pas seulement sur un segment.

5. L'énoncé sous-entend que les conditions données sont cohérentes et définissent ψ_h de façon unique.

5.1. On peut bien sûr se contenter de vérifier que l'application $x \mapsto (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}\left(1 + x - h\,\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right)$ satisfait aux deux conditions de définition de ψ_h.

Il est plus élégant et efficace de paramétrer les réels de l'intervalle $[n\,h, (n+1)\,h]$ par $x = (1-\alpha)\,n\,h + \alpha(n+1)\,h$ ce qui donne aussitôt $\psi_h(x) = (1-\alpha)\psi_h(n\,h) + \alpha\psi_h((n+1)\,h)$ et permet de conclure.

5.2. La notion de primitive généralisée d'une application continue par morceaux n'est pas au programme, mais peut être avantageusement utilisée ici.

Soit $n \in \mathbb{Z}$; sur l'intervalle fermé $[n\,h; (n+1)\,h]$, ψ_h est affine donc sa restriction y est dérivable et, par définition même, de dérivée constante...puis la relation de Chasles permet de calculer $\displaystyle\int_0^x (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\,\mathrm{d}\,t$

5.3. Inégalités de la moyenne appliquées à $\displaystyle\int_x^y (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}\,\mathrm{d}\,t$.

5.4. Pour $x < y$, on a $\dfrac{\psi_h(y) - \psi_h(x)}{y - x} \geqslant (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)}$; le membre de gauche est le coefficient directeur de la sécante joignant les points $(x, \psi_h(x))$ et $(y, \psi_h(y))$ et le membre de droite, la pente du segment (de droite si ambiguïté) de la représentation graphique de ψ_h passant par $(x, \psi_h(x))$. L'inégalité est graphiquement équivalente à la convexité.

5.5. La croissante résulte de la positivité de $t \mapsto (1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{t}{h}\right)}$. La convexité est une conséquence de l'inégalité du 5.3 et de la sous-partie III de la première partie.

6. **6.1.** On conjecture que chaque α_x (resp. β_x) est (strictement) décroissante (resp. croissante), continue, dérivable par morceaux, et bornée, sur $]0,x]$, en particulier au voisinage de 0, et enfin que α_x et β_x possède une limite commune en 0.

6.2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$; sur l'intervalle *ouvert* $\left]\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p}\right[$, $\alpha_x(h) = (1+h)^p(1+x-h\,p)$ donc α_x y est dérivable et $\alpha_x'(h) = (1+h)^{p-1}p\,(x-h\,(p+1)) < 0$ donc α_x est (strictement) décroissante sur cet intervalle. (La stricte décroissance n'étant pas utile pour la suite.)

Ensuite, la même expression de α_x donne $\lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p}\\<}} \alpha_x(h) = \left(1+\frac{x}{p}\right)^p$ et $\lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p+1}\\>}} \alpha_x(h) = \left(1+\frac{x}{p+1}\right)^{p+1}$ et donc en décalant, $\lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p}\\>}} \alpha_x(h) = \left(1+\frac{x}{p}\right)^p$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p}\\<}} \alpha_x(h) = \lim\limits_{\substack{h\to\frac{x}{p}\\>}} \alpha_x(h) = \alpha_x\left(\frac{x}{p}\right)$ d'où la continuité de α_x en chaque $\frac{x}{p}$ et finalement sur $]0,x]$.

Par passage à la limite dans les inégalités, on en déduit la décroissance de α_x sur chaque *segment* $\left[\frac{x}{p}, \frac{x}{p+1}\right]$, puis α_x étant décroissante par morceaux *fermés* sur $]0,x]$, on en déduit la décroissance sur $\bigcup\limits_{p\geqslant 1}\left[\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p}\right] =]0,x]$.

6.3. Soit $h \in]0,x]$; on a, par croissance de ψ_h et croissance de β_x : $\alpha_x(h) = \psi_h(x) \leqslant \psi_h(x(1+h)) = \beta_x(h) \leqslant \beta_x(x)$. Donc α_x est majorée sur $]0,x]$.

6.4. Le théorème de la limite monotone bornée permet alors de conclure à l'existence d'une limite finie pour α_x en 0, qui est aussi $\lim\limits_{h\to 0}\psi_h(x)$. En évidence, $\lim\limits_{h\to 0}\psi_h(0) = 1$.

7. **7.1.** Le théorème de passage à la limite dans les inégalités fournit immédiatement la conservation de la positivité, de la croissance et de la convexité de ψ_h. De plus, d'après la sous-partie IV de la première partie, on en déduit que $\mathcal{E}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

7.2. Cela résulte ici encore d'un passage à la limite dans les inégalités obtenues à la question 5.3.

En effet, pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a : $\frac{x}{h} - \mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right) \in [0,1[$; donc d'une part on a :

$1 + x - h\,\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right) = 1 + h\left(\frac{x}{h} - \mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right) \geqslant 1 > 0$ et d'autre part, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\>}}\left(1 + x - h\,\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right) = 1$ donc

$(1+h)^{\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)} = \dfrac{\psi_h(x)}{\left(1 + x - h\,\mathsf{E}\left(\frac{x}{h}\right)\right)}$ a aussi pour limite $\mathcal{E}(x)$ lorsque h tend vers 0.

7.3. Les résultats de la sous-partie III de la première partie permette d'en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(x) - \mathcal{E}(0) = \displaystyle\int_0^x \mathcal{E}(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\mathcal{E}(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x \mathcal{E}(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $\mathcal{E}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit d'après la question 2 de cette partie que $\mathcal{E}$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$.

8. **8.1.** D'après la question 1 de cette partie, l'unique $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{k,a}$ est : $\phi(x) = a\mathcal{E}(k\,x)$. (formule qui vaut même si $a = 0$).

8.2. Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé ; le problème $\mathsf{PC}_{1,\mathcal{E}(y)}$ possède une unique $\mathbb{R}$-solution qui est, d'après la question précédente, $\phi(x) = \mathcal{E}(y)\mathcal{E}(x)$. Or il est clair que $\psi(x) = \mathcal{E}(y+x)$ est aussi $\mathbb{R}$-solution de ce problème ; l'unicité permet d'en déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{E}(y+x) = \mathcal{E}(y)\mathcal{E}(x)$.

9. D'après la partie II, $\boldsymbol{e}$ est $\mathbb{R}$-solution du problème $\mathsf{PC}_{1,1}$; l'unicité fournit ici encore $\boldsymbol{e} = \mathcal{E}$.

3. Énoncé de la deuxième épreuve

Rappels et notations

• $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices à coefficients réels et à trois lignes et trois colonnes. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $A\,[i,j]$ le coefficient de A dont l'indice de ligne est égal à i et l'indice de colonne est égal à j.

• $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ est le sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices dont les coefficients sont entiers.

1. Dans tout le problème, E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Le produit scalaire de deux vecteurs u et v est noté $\langle u,v\rangle$. La norme euclidienne d'un vecteur v est notée $\|v\|$. La distance associée à cette norme est notée d. Si u et v sont deux vecteurs de $\mathbf{E}$, on a donc $d(u,v) = \|u-v\|$.
$\mathbf{E}$ est rapporté à une base $\mathcal{B}$ orthonormée directe.

On note $\mathbf{S}^2$ la sphère unité de $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{S}^2 = \{v \in \mathbf{E} \mid \ \|v\| = 1\}$$

On note $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ l'application identique de $\mathbf{E}$.

$\mathcal{O}(\mathbf{E})$ est le groupe des automorphismes orthogonaux de $\mathbf{E}$.

Si f et g sont deux éléments de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$, on note $f\,g$ au lieu de $f\circ g$ l'automorphisme composé de g et de f.

On rappelle que :
- Le déterminant d'un automorphisme orthogonal est égal à 1 ou à -1.
- Les rotations vectorielles (ou plus simplement les rotations) sont les éléments de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$ dont le déterminant est égal à 1. Leur ensemble noté $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(\mathbf{E})$.
- D étant une droite vectorielle de **E,** on appelle demi-tour d'axe D la symétrie orthogonale par rapport à D ; il s'agit d'une rotation vectorielle.
- $\mathcal{SO}(3)$ est le groupe des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont le déterminant est égal à 1. Rappelons que l'application qui à toute rotation de $\mathbf{E}$ associe la matrice qui la représente dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ sur $\mathcal{SO}(3)$.

2. Ensembles dénombrables

On rappelle que :
- Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- L'image d'un ensemble dénombrable par une application est encore un ensemble dénombrable.
- Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

3. Partitions

Soit A un ensemble non vide. On rappelle que la famille $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de A constitue une partition de A si :

(i) Aucun des sous-ensembles A_i n'est vide.

(ii) $\bigcup_{i\in I} A_i = A$.

(iii) $\forall (i,j)\in I^2,\ i\neq j \Rightarrow A_i\cap A_j = \emptyset$.

4. Groupes, sous-groupe engendré par une partie

- Etant donné un groupe $(\mathbf{G},.)$ dont la loi est notée multiplicativement, g étant un élément de $\mathbf{G}$, l'application de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{G}$: $h\to g\,h$ est bijective. Si $\mathbf{H}$ est un sous-ensemble de $\mathbf{G}$, on note

$$g\,\mathbf{H} = \{g\,h \mid h\in\mathbf{H}\}$$

- Etant donné un groupe $(\mathbf{G},.)$ dont la loi est notée multiplicativement et S un sous-ensemble de $\mathbf{G}$, on appelle sous-groupe engendré par S le plus petit sous-groupe de $\mathbf{G}$ contenant S; c'est l'intersection de tous les sous-groupes de $\mathbf{G}$ qui contiennent S.

5. Déplacements

On note $\mathrm{Dep}\,(\mathbf{E})$ l'ensemble des déplacements de $\mathbf{E}$ lorsque ce dernier est muni de sa sructure canonique d'espace affine euclidien sur lui même. On rappelle que $(\mathrm{Dep}\,(\mathbf{E})\,,\circ)$ est un groupe.

Préliminaires

Soit Ω un ensemble quelconque non vide. A et B étant deux sous-ensembles de Ω, on note $A\setminus B$ l'intersection de A et du complémentaire de B ; en d'autres termes :

$$A\setminus B\ = \{x\in X \mid x\in A \text{ et } x\notin B\}$$

$\mathfrak{S}\,(\Omega)$ désigne le groupe des bijections de Ω sur lui-même.

Soit f appartenant à $\mathfrak{S}\,(\Omega)$; si A est un sous-ensemble de Ω, on note $f(A)$ le sous-ensemble de Ω dont les éléments sont les images des éléments de A :

$$f(A) = \{y \in \Omega \,|\, \exists x \in A,\ f(x) = y\}$$

On rappelle que :
(i) $f\,(A) = \emptyset$ si et seulement si $A = \emptyset$.
(ii) Si A et B sont deux sous-ensembles de X, on a :

$$A \subset B \Leftrightarrow f\,(A) \subset f\,(B)\,.$$

(iii) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-ensembles de X indexée par l'ensemble I, on a :

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f\,(A_i)$$

(iv) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de sous-ensembles de X indexée par l'ensemble I, on a :

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f\,(A_i)$$

(v) Si A et B sont deux sous-ensembles de X, on a :

$$f\,(A \setminus B) = f\,(A) \setminus f\,(B)$$

1. Démontrer les propriétés *(iv)* et *(v)*.

2. Prouver ensuite que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω si et seulement si $(f(A_i))_{i\in I}$ est une partition de Ω

Partie I : quelques propriétés des rotations de l espace E

1. Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles de $\mathbf{E}$.

a) On suppose que ρ_1 et ρ_2 ont le même axe.
Prouver que $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$.

b) On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours d'axes respectifs D_1 et D_2 orthogonaux. Prouver que $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$ et déterminer cette rotation.

2. Réciproque :

Soit ρ une rotation vectorielle distincte de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, d'axe $D = \mathbb{R}\omega$ où $||\omega|| = 1$.

a) Soit Δ une droite vectorielle distincte de D et telle que $\rho(\Delta) = \Delta$. Prouver que D et Δ sont orthogonales et que ρ est un demi-tour.

b) Soit ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles distinctes de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ dont les axes respectifs D_1 et D_2 sont distincts. Montrer que si $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$, alors D_1 est une droite invariante par ρ_2. En déduire que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux.

c) Conclure en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments ρ_1, ρ_2 de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ commutent (c'est-à-dire $\rho_2\,\rho_1 = \rho_1\,\rho_2$).

Soient ρ_1 et ρ_2 deux rotations vectorielles de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{G}$ le sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ engendré par ρ_1 et ρ_2.

3. On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont les rotations d'angles respectifs α_1, α_2 autour de la droite D dirigée et orientée par le vecteur unitaire ω.

a) On note $\mathbf{H} = \{\rho_1^{n_1}\,\rho_2^{n_2} \mid (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{SO}\,(\mathbf{E})$ et que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

b) On suppose de plus que l'égalité

$$x\alpha_1 + y\alpha_2 + z\pi = 0$$

où x, y, z sont des entiers relatifs n'est possible que si $x = y = z = 0$. Démontrer que pour tout $r \in \mathbf{G}$, il existe un *unique* couple $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $r = \rho_1^{n_1}\,\rho_2^{n_2}$.

4. On suppose que ρ_1 et ρ_2 sont deux demi-tours dont les axes sont orthogonaux . Démontrer que $\mathbf{G}$ contient exactement quatre éléments que l'on explicitera. On donnera la table du groupe de $\mathbf{G}$.

5. On suppose que ρ_1 et ρ_2 ne commutent pas. On note $\mathbf{H}$ le sous-ensemble de $\mathcal{SO}\,(\mathbf{E})$ formé des éléments de la forme $s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \{\rho_1, \rho_2\}^n$, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$.

a) Démontrer que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ et que $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

b) Soit $g \in \mathbf{G} - \{\mathrm{Id}_\mathbf{E}\}$. Démontrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ appartenant à $\{\rho_1, \rho_2\}^n$, une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall\, i \in [1, n[,\ s_i \neq s_{i+1} \tag{1}$$

Cette décomposition n'est en général pas unique (si ρ_1 est un demi-tour, alors $\rho_1 = \rho_1^3$). Dans la partie suivante on construit un exemple où cette fois la décomposition sera unique.

Partie ii : Étude d'un sous-groupe de $\mathcal{SO}(3)$

On pose dans ce qui suit $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

I_3, R et T sont les matrices de $\mathcal{SO}(3)$ définies par :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ρ et τ sont les rotations de $\mathbf{E}$ de *matrices respectives R, T dans la base $\mathcal{B}$.*

$\mathbb{G}$ est le sous-groupe de $\mathcal{SO}(3)$ engendré par $\{R, T\}$. $\mathbf{G}$ *est le sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ engendré par $\{\rho, \tau\}$. Il est manifestement isomorphe à $\mathbb{G}$.*

On rappelle que la relation $p \equiv q \bmod 5$ où p et q sont des entiers relatifs, signifie que 5 divise $q - p$.

1. Pour tout entier *relatif* n, on pose

$$a_n = 5^{|n|}\cos(n\alpha) \text{ et } b_n = 5^{|n|}\sin(n\alpha)$$

a) Factoriser $\cos(n+1)\alpha + \cos(n-1)\alpha$. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$a_{n+1} = 6a_n - 25a_{n-1}$$

b) Prouver que pour tout entier n supérieur ou égal à zéro :

$$b_{n+1} = 3b_n + 4a_n$$

c) Prouver que pour tout entier *relatif* n, a_n et b_n sont des entiers relatifs.

d) Montrer que si n est différent de zéro, alors $a_n \equiv 3 \bmod 5$.

e) Montrer que si n est un entier strictement positif, alors $b_n \equiv 4 \bmod 5$.

Montrer que si n est un entier strictement négatif, alors $b_n \equiv 1 \bmod 5$.

2. *On note $\equiv$ la relation définie sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ par $M \equiv M'$ si et seulement si pour tout couple (i, j)* de $[1, 3]^2$, on a :

$$M[i,j] \equiv M'[i,j] \bmod 5$$

On vérifie aisément qu'il s'agit là d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. On ne demande pas de démontrer ce résultat.

a) Démontrer que cette relation est compatible avec le produit matriciel, c'est-à-dire si A, B, C, D sont des éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ tels que $A \equiv B$ et $C \equiv D$, alors $AC \equiv BD$.

b) Démontrer que pour tout entier k, $5^{|k|}R^k$ et $5^{|k|}T^k$ appartiennent à $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ et que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*,\ 5^{|k|}R^k \equiv \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon_k & 0 \\ -\varepsilon_k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad 5^{|k|}T^k \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \varepsilon_k \\ 0 & -\varepsilon_k & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{où } \varepsilon_k = 1 \text{ si } k > 0 \text{ et } \varepsilon_k = -1 \text{ si } k < 0$$

Existe-t-il un entier relatif k différent de 0, tel que $R^k = I_3$ ou $T^k = I_3$?

c) Démontrer que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^{*2},\ 5^{|m|+|n|}T^m R^n \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_n & 4 & 0 \\ \varepsilon_n\varepsilon_m & 2\varepsilon_m & 0 \end{bmatrix}$$

d) Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*\,n}$ et β appartenant à $\mathbb{Z}^*$. On pose $q = \sum\limits_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|)$. Démontrer que

$$5^q T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix}$$

où a, b, c, d sont des entiers relatifs qui ne sont pas congrus à 0 modulo 5.

e) En déduire que

$$T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} \neq I_3 \tag{2}$$

$$T^{a_1} R^{b_1} \cdots T^{a_n} R^{b_n} T^{\beta} \neq I_3 \tag{3}$$

3. Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*\,n}$ et β appartenant à $\mathbb{Z}^*$. Déduire des égalités précédentes que

$$R^{a_1} T^{b_1} \cdots R^{a_n} T^{b_n} \neq I_3 \tag{4}$$

$$R^{a_1} T^{b_1} \cdots R^{a_n} T^{b_n} R^{\beta} \neq I_3 \tag{5}$$

4. Conclure que pour tout g appartenant à $\mathbf{G} \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$, il existe de *façon unique* un entier n strictement positif, une famille $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de $\{\rho, \tau\}^n$ et une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{Z}^{*\,n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, n-1]\,,\ s_i \neq s_{i+1}$$

On appelle terme de tête de g l'élément s_1 lorsque $a_1 > 0$ et s_1^{-1} lorsque $a_1 < 0$. Ce terme de tête sera noté $t(g)$.

5. Démontrer que $\mathbf{G}$ est un ensemble dénombrable.

6. Pour tout élément σ de $\{\rho, \rho^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$, on note $L(\sigma)$ l'ensemble des éléments g de $\mathbf{G} \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$ pour lesquels $t(g) = \sigma$.

a) Vérifier que

$$\mathbf{G} = \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\} \cup L(\rho) \cup L\left(\rho^{-1}\right) \cup L(\tau) \cup L\left(\tau^{-1}\right)$$

et que l'obtient ainsi une partition de **G.**

b) Vérifier que :

$$L(\rho) = \{\rho\} \cup \rho L(\rho) \cup \rho L(\tau) \cup \rho L\left(\tau^{-1}\right)$$

et que l'obtient ainsi une partition de $L(\rho)$**.**

De la même manière on a

$$\begin{aligned} &L(\rho^{-1}) = \{\rho^{-1}\} \cup \rho^{-1} L(\rho^{-1}) \cup \rho^{-1} L(\tau) \cup \rho^{-1} L\left(\tau^{-1}\right) \\ &L(\tau) = \{\tau\} \cup \tau L(\tau) \cup \tau L(\rho) \cup \tau L\left(\rho^{-1}\right) \\ &L(\tau^{-1}) = \{\tau^{-1}\} \cup \tau^{-1} L(\tau^{-1}) \cup \tau^{-1} L(\rho) \cup \tau^{-1} L\left(\rho^{-1}\right) \end{aligned}$$

On ne demande pas de démontrer ces trois égalités.

c) En déduire que

$$\mathbf{G} = L(\rho) \cup \rho L\left(\rho^{-1}\right) = L(\tau) \cup \tau L\left(\tau^{-1}\right)$$

et que, dans les deux cas, on obtient ainsi une partition de **G.**

Partie III : Étude de sous-ensembles de $\mathbf{S}^2$

Les données et les notations de cette partie sont celles de la Partie II. $\mathbf{G}$ est le sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ engendré par $\{\rho, \tau\}$.

On considère l'ensemble

$$F = \{v \in \mathbf{S}^2 \ \mid\ \exists\, g \in \mathbf{G} \setminus \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\},\ g(v) = v\}$$

et son complémentaire dans $\mathbf{S}^2$, soit $X = \mathbf{S}^2 \setminus F$.

1. Démontrer que l'ensemble F est un sous-ensemble dénombrable de $\mathbf{S}^2$. En déduire que X n'est pas vide.

2. Vérifier que pour tout $g \in \mathbf{G}$ et pour tout $v \in X$, $g(v) \in X$.

3. Démontrer que si g et h sont deux éléments de $\mathbf{G}$ tels qu'il existe v appartenant à X vérifiant $g(v) = h(v)$, alors $g = h$.

4. a) Démontrer que pour tout g appartenant à $\mathbf{G}$, la restriction de g à X induit une bijection de X sur lui-même que l'on notera g_X.

b) Démontrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G} & \to & \mathfrak{S}(X) \\ g & \mapsto & g_X \end{array}$$

est un homomorphisme injectif de groupes. Cela permet d'identifier $\mathbf{G}$ à un sous-groupe de $\mathfrak{S}(X)$.

5. On considère la relation $\sim_{\mathbf{G}}$ définie sur X par

$$a \sim_{\mathbf{G}} b \Leftrightarrow \exists g \in \mathbf{G},\ a = g(b)$$

Prouver qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

On sait que les classes d'équivalence de $\sim_{\mathbf{G}}$ forment une partition de X. On admet alors en utilisant l'axiome du choix l'existence d'un sous-ensemble M de X dont l'intersection avec chaque classe d'équivalence contient un et un seul point.

6. Prouver que la famille $(g(M))_{g\in\mathbf{G}}$ constitue une partition de X.

7. On pose

$$X_0 = M,\ \ X_1 = \bigcup_{g\in L(\rho)} g(M),\ \ X_2 = \bigcup_{g\in L(\tau)} g(M),\ \ X_3 = \bigcup_{g\in L(\rho^{-1})} g(M),\ \ X_4 = \bigcup_{g\in L(\tau^{-1})} g(M)$$

a) Prouver que $(X_0, X_1, X_2, X_3, X_4)$ constitue une partition de X.

b) Prouver que

$$\begin{aligned} X &= X_1 \cup \rho\,(X_3) \ \text{ et } X_1 \cap \rho\,(X_3) = \emptyset && (6) \\ X &= X_2 \cup \tau\,(X_4) \ \text{ et } X_2 \cap \tau\,(X_4) = \emptyset && (7) \end{aligned}$$

8. On note $\Lambda = \{(u,v) \in F \times F \mid u \neq v\}$.

a) Vérifier que Λ est un ensemble dénombrable.

b) Si $(u,v) \in \Lambda$, on considère $\Gamma_{u,v} = \{w \in \mathbf{S}^2 \mid \|w-u\| = \|w-v\|\}$. Quelle est la nature géométrique de cet ensemble ?

c) Soit $\Gamma = \bigcup_{(u,v)\in\Lambda} \Gamma_{u,v}$. Démontrer que $\Gamma \cup F$ est symétrique par rapport à l'origine et que $\Gamma \cup F$ est strictement inclus dans $\mathbf{S}^2$.

Indication : on pourra considérer l'intersection de $\Gamma \cup F$ avec un cercle tracé sur $\mathbf{S}^2$ qui ne soit pas centré à l'origine.

d) Démontrer qu'il existe un élément r de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ dont l'axe ne rencontre pas $\Gamma \cup F$ et tel que

$$\forall p \in \mathbb{Z}^*,\ r^p \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$$

e) Soit (u,v) appartenant à $F \times F$. Montrer que pour tout entier k strictement positif, $r^k(u)$ est différent de v. On distinguera les cas : $u = v$ et $u \neq v$.

En déduire que si m et n sont deux entiers naturels distincts, alors

$$r^n(F) \cap r^m(F) = \emptyset$$

f) On pose

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} r^n(F) \ \text{ et } \ Z = \mathbf{S}^2 \setminus Y$$

g) Démontrer que

$$r\,(Y) \cap Z = \emptyset \ \text{ et } \ \mathbf{S}^2 \setminus F = r\,(Y) \cup Z$$

Partie iv : Équidécomposabilité

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbf{E}$. *On dit que A est équidécomposable à B s'il existe une partition finie $(A_i)_{i\in I}$ de A, une partition finie $(B_i)_{i\in I}$ de B et une famille finie $(g_i)_{i\in I}$, de déplacements de* $\mathbf{E}$ *telles que*

$$\forall i \in I,\ B_i = g_i(A_i)$$

(les trois familles sont indexées par un même ensemble fini I). *On écrira alors $A \sim B$.*

1. Les notations étant celles de la question III. 8, vérifier que $\mathbf{S}^2$ est équidécomposable à $\mathbf{S}^2 \setminus F$

2. Soient A_1, A_2, B_1, B_2 des sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ tels que :

$$A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset,\ \ A_1 \sim B_1,\ \ A_2 \sim B_2$$

a) Vérifier que $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

b) Généraliser.

3. Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des parties non vides de $\mathbf{E}$.

Pour démontrer la transitivité, on observera que si $(A_i)_{i\in I}$ et $\left(A'_j\right)_{j\in J}$ sont deux partitions de A, et que si l'on pose

$$K = \left\{(i,j) \in I \times J \mid A_i \cap A'_j \neq \emptyset\right\}$$

alors la famille $\left(A_i \cap A'_j\right)_{(i,j)\in K}$ est encore une partition de A.

4. On suppose que $A \sim B$. Démontrer qu'il existe une bijection ψ de A sur B telle que pour tout sous-ensemble non vide C de A, on ait :

$$C \sim \psi\,(C)$$

Soient A et B *deux sous-ensembles non vides de* $\mathbf{E}$. *On posera $A \preccurlyeq B$ lorsqu'il existe un sous-ensemble non vide B' de B tel que $A \sim B'$. En particulier, si $A \sim B$, alors $A \preccurlyeq B$.*

La relation $\preccurlyeq$ est une relation réflexive et transitive sur l'ensemble des parties non vides de $\mathbf{E}$. *Les preuves sont analogues à celles des questions précédentes. On observera par ailleurs que si A et B sont des sous-ensembles non vides de X tels que $A \subset B$, il est évident que $A \preccurlyeq B$.*

On admettra dans la suite du problème le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, qui s'énonce de la manière suivante :

Si A et B sont deux sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ tels que $A \preccurlyeq B$ et $B \preccurlyeq A$, alors $A \sim B$.

Partie v : ensembles paradoxaux

Les définitions et les notations sont les mêmes que dans la partie précédente.

Un sous-ensemble A de $\mathbf{E}$ est paradoxal s'il existe deux sous-ensembles non vides B, C de A tels que

$$B \sim A,\ \ C \sim A\ \text{ et }\ B \cap C = \emptyset \tag{8}$$

1. Les notations étant celles de la partie III, vérifier que X est paradoxal.

2. Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbf{E}$ telles que $A \sim B$. Démontrer que si A est paradoxal, alors il en est de même de B.

On pourra utiliser le résultat de la question 4 de la partie IV.

3. Soit A un sous-ensemble paradoxal de $\mathbf{E}$, B, C deux sous-ensembles de A non vides vérifiant les relations (**??**).

a) En utilisant le théorème de Banach-Schröder-Bernstein, démontrer que $(A \setminus C) \sim A$.

b) En déduire qu'il existe une partition (A_1, A_2) de A telle que :

$$A_1 \sim A\ \text{ et }\ A_2 \sim A$$

4. Démontrer que $\mathbf{S}^2$ est paradoxal.

5. En déduire que si Σ_1 et Σ_2 sont deux sphères disjointes de rayon 1, alors

$$\mathbf{S}^2 \sim \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

4. Analyse de la deuxième épreuve

1 Contenu du sujet

Le problème d'algèbre-géométrie de la session 2004 avait pour but l'étude les notions d'équidécomposabilité et d'ensembles paradoxaux dans un cadre euclidien. L'objectif final était d'obtenir une preuve de la forme faible du théorème de Banach-Tarski concernant le caractère paradoxal de la sphère unité dans un espace affine eucidien de dimension trois. Le lecteur intéressé par ces notions poura consulter avec profit l'excellent livre de Stan Wagon : The Banach-Tarski paradox (Cambridge university press).

• La partie préliminaire consistait à redémontrer quelques propriétés élémentaires de théorie des ensembles. Beaucoup de candidats ne s'aperçoivent pas que le point essentiel dans la démonstration de la propriété (iv) est l'injectivité de l'application f.

• La partie I présentait quelques propriétés des rotations vectorielles d'un espace vectoriel euclidien de dimension trois. Seule la dernière question de cette partie était délicate.

• La partie II avait pour objectif la construction d'un groupe libre engendré par deux éléments de $\mathcal{SO}(3)$. Cette partie nécessitait quelques connaissances de base concernant le raisonnement par récurrence, les congruences dans $\mathbf{Z}$ ainsi qu'une certaine pratique du calcul matriciel dans le groupe $\mathcal{SO}(3)$. Le jury a pu constater que dans de trop nombreuses copies la rédaction des raisonnements par récurrence était très approximative. Par ailleurs le calcul des puissances d'une matrice telle que

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est évident dès que l'on interprète géométriquement ce calcul.

• La partie III mettait en place un sous-ensemble X de $\mathbf{S}^2$ sur lequel le groupe $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ opère fidèlement. On faisait également démontrer que cet ensemble X était paradoxal pour l'action du groupe $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$. Le caractère non dénombrable de la sphère $\mathbf{S}^2$ ainsi que l'utilisation de l'axiome du choix sont les clefs de l'obtention de ces résultats.

• Enfin les parties IV et V proposaient une étude de l'équidécomposabilité ainsi que de la notion d'ensemble paradoxal. Le caractère paradoxal de la sphère $\mathbf{S}^2$ concluait le sujet. Signalons que le véritable théorème de Banach-Tarski montre que les boules de $\mathbf{E}$ sont paradoxales, grâce à quoi il est possible de prouver un résultat encore plus remarquable : deux sous-ensembles de $\mathbf{E}$ qui sont bornés et d'intérieur non vides sont équidécomposables.

2 Analyse de quelques questions

2.1 Partie I

Cette partie nécessitait quelques connaissances des rotations vectorielles d'un espace euclidien de dimension trois.

Question 1a) : il suffit d'écrire $\mathbf{E} = D \oplus P$, où D est l'axe de ρ, P l'orthogonal de D, puis d'utiliser la commutativité du groupe des rotations du plan P.

Question 1b) : le plus simple est de traiter le problème matriciellement en travaillant dans une base orthonormale (u_1, u_2, u_3), où u_1 et u_2 dirigent les axes de $\rho_1$et ρ_2. On montre ainsi que $\rho_1\rho_2$ est le demi-tour d'axe $\mathbf{R}u_3$. Certains candidats ont pensé pouvoir ramener cette question à un problème de géométrie plane, ce n'est évidemment pas possible !

Question 1 c) : Cette question ne présentait pas de difficulté particulière. Il fallait cependant prendre soin de rédiger correctement les raisonnements par récurrence, notamment en ce qui concerne l'initialisation desdites récurrences.

Questions 2a), b), c) : Soit P le plan orthogonal à D. On suppose ρ distcincte de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, sinon il n'y a rien à faire !

Posons $\Delta = \mathbb{R}u$. L'égalité $\rho(\Delta) = \Delta$ signifie que $\rho(u)$ et u sont colinéaires. Or cela n'est possible que si $\rho(u) = u$ ou si $\rho(u) = -u$.

– Dans le premier cas, $\Delta = D$, mais ce cas est exclu.
– Dans le second cas, u est nécessairement orthogonal à D. En effet :

$$\langle u, \omega \rangle = \langle \rho(u), \rho(\omega) \rangle = \langle -u, \omega \rangle = -\langle u, \omega \rangle \text{ d'où } \langle u, \omega \rangle = 0$$

u appartient donc à P. La rotation induite par ρ sur le plan P envoie alors u sur $-u$, donc coïncide avec $-\mathrm{Id}_{\mathbf{P}}$. Il s'ensuit que ρ est le demi-tour d'axe D. *cqfd*

I.2.b) Soit D_1 (resp. D_2) l'axe de ρ_1 (resp. ρ_2). Pour tout $v_1 \in D_1$,

$$\rho_2(v_1) = \rho_2(\rho_1(v_1)) = \rho_1(\rho_2(v_1))$$

$\rho_2(v_1)$ appartient donc à l'axe de ρ_1, soit

$$\rho_2(v_1) \in D_1$$

Il s'ensuit que $\rho_2(D_1) = D_1$, et vu ce qui précède :
– Ou bien $D_1 = D_2$, mais ce cas est exclu par hypothèse.
– Ou bien ρ_2 est un demi-tour et D_1 et D_2 sont orthogonales. En inversant les rôles, on montre alors que ρ_1 est également undemi-tour.

I 2 c) Les questions **I 1** et **I 2** montrent que deux rotations commutent si et seulement si l'une d'elles est égale à $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ ou lorsqu'elles sont distinctes de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, si elles possèdent le même axe ou enfin s'il s'agit de demi-tours d'axes orthogonaux.

Questions 3,4,5a) : ces questions ne présentaient pas de difficulté et ont été correctement traitées par bon nombre de candidats. Signalons cependant que la notion d'angle d'une rotation vectorielle de l'espace **E** ne peut être défini qu'après avoir orienté l'espace **E** et avoir fait le choix d'une orientation sur l'axe de ladite rotation.

Question 5b) : un certain nombre de candidats a bien compris la question posée, cependant la rédaction proposée n'était pas toujours très convaincante. On pouvait raisonner de la façon suivante :

Soit **K** le sous-ensemble de **G** formé de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ et des éléments $g \in \mathbf{G} - \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$ pour lesquels il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$, une famille $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ appartenant à $\{\rho_1, \rho_2\}^n$, une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ appartenant à $\mathbb{Z}^{*n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \text{ et } \forall\, i \in [1, n[,\ s_i \neq s_{i+1} \qquad (1)$$

On va montrer que **K** est un sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$.
– Il est évident que $g \in \mathbf{K} \Rightarrow g^{-1} \in \mathbf{K}$ puisque

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \Rightarrow g^{-1} = s_n^{-a_n} ... s_2^{-a_2} s_1^{-a_1}$$

– Considérons

$$g = s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \in \mathbf{K} \text{ et } h = t_1^{b_1} t_2^{b_2} \cdots t_m^{b_m} \in \mathbf{K}$$

– avec les conditions habituelles sur les a_i et les b_j. On a alors :

$$hg = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_m^{a_m} s_1^{b_1} s_2^{b_2} \cdots s_n^{b_n}$$

  – Dans le cas où $t_m \neq s_1$, il n'y a rien à ajouter : il est évident que $hg \in \mathbf{K}$.
  – Dans le cas où $t_m = s_1$, alors

$$hg = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_{m-1}^{a_{m-1}} s_1^{a_m + b_1} s_2^{b_2} \cdots s_n^{b_n}$$

  Si $a_m + b_1 \neq 0$, c'est terminé : $hg \in \mathbf{K}$
  Sinon on est ramené à une situtation analogue mais faisant intervenir moins de termes :

$$hg = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_{m-1}^{a_{m-1}} s_2^{b_2} \cdots s_n^{b_n}$$

  On recommence le raisonnement.
– Finalement : ou bien $h = g^{-1}$ et $hg = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, ou bien $h \neq g$ et le processus s'arrête en donnant un élement de **K**.

Conclusion : **K** est un sous-groupe de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$, il est contenu dans **H** et enfin il contient $\{\rho_1, \rho_2\}$, donc il contient **H**. En définitive $\mathbf{H} = \mathbf{K}$, ce qui fournit la réponse à la question.

2.2 Partie II : étude d'un sous-groupe de $\mathcal{SO}(3)$

Quesstion 1a) : on posait $\alpha = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$. Il s'agit donc d'un réel compris entre 0 et π. De ce fait $\sin\alpha$ est positif. Cette simple observation a manqué à de nombreux candidats qui se contente d'écrire $\sin\alpha = \pm\frac{4}{5}$ pour finir par se débarasser du signe "-" lorsque cela devient nécessaire dans leurs calculs...

Questions 1d), 1e), 2a), 2b) : si les candidats connaissent les relations de congruence modulo un entier donné, en revanche un grand nombre ne maîtrise pas la compatibilité de ces relations avec les opérations + et $\times$ de $\mathbf{Z}$. Une bonne utilisation de ces propriétés permettait pourtant une résolution rapide des questions.

Question 2c) : Il suffit d'utiliser la compatibilité de la relation $\sim$ avec le produit matriciel :

$$5^{|m|+|n|}T^mR^n \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \varepsilon_m \\ 0 & -\varepsilon_m & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon_n & 0 \\ -\varepsilon_n & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3\varepsilon_n & 9 & 0 \\ \varepsilon_n\varepsilon_m & -3\varepsilon_m & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_n & 4 & 0 \\ \varepsilon_n\varepsilon_m & 2\varepsilon_m & 0 \end{bmatrix}$$

Question 2d) : Démonstration par récurrence sur n.

Question .2e) : On en déduit ausitôt que pour $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ appartenant à $\mathbf{Z}^{*\,n}$:

$$T^{a_1}R^{b_1}\cdots T^{a_n}R^{b_n} \neq I_3$$

De même si l'on a $T^{a_1}R^{b_1}\cdots T^{a_n}R^{b_n}T^{\beta} = I_3$, alors $5^{q+|\beta|}T^{a_1}R^{b_1}\cdots T^{a_n}R^{b_n}T^{\beta} \sim 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \varepsilon_\beta \\ 0 & -\varepsilon_\beta & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3b & b\varepsilon_\beta \\ 0 & 3d & d\varepsilon_\beta \end{bmatrix}$$

où a, b, c, d sont des entiers non multiples de 5 et $\varepsilon_\beta = \pm 1$. On voit donc qu'on aboutit à une contradication.

Question 3 : Soient $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ appartenant à $\mathbf{Z}^{*\,n}$ et β appartenant à $\mathbf{Z}^*$.
• Supposons que $R^{a_1}T^{b_1}\cdots R^{a_n}T^{b_n} = I_3$, on aurait alors :

$$T^{b_1}R^{a_2}\cdots R^{a_n}T^{b_n} = R^{-a_1} \Leftrightarrow T^{b_1}R^{a_2}\cdots R^{a_n}T^{b_n}R^{a_1} = I_3$$

or une telle égalité est impossible d'après la question **3 e).**
• De même l'égalité $R^{a_1}T^{b_1}\cdots R^{a_n}T^{b_n}R^{\beta} = I_3$ conduirait à

$$R^{a_1}T^{b_1}\cdots R^{a_n}T^{b_n} = R^{-\beta} \Leftrightarrow T^{b_1}\cdots R^{a_n}T^{b_n} = R^{-a_1-\beta} \Leftrightarrow T^{b_1}R^{a_2}\cdots R^{a_n}T^{b_n}R^{a_1+\beta} = I_3$$

Cette dernière égalité n'est possible (voir question **2 e)**) que si $a_1 + \beta = 0$. On obtient alors :

$$T^{b_1}R^{a_2}T^{b_2}\cdots R^{a_n}T^{b_n} = I_3$$

ce qui n'est pas possible à nouveau en utilisant la conclusion de la question **2 e).**

Remarque : en résumé, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in \{R, T\}^n$ et $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbf{Z}^{*n}$, il n'est pas possible d'obtenir :

$$S_1^{p_1}S_2^{p_2}\cdots S_n^{p_n} = I_3$$

Question 4 : Soit $g \in \mathbf{G} - \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$. On sait d'après la question **I 5** qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$, une famille $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ appartenant à $\{\rho, \tau\}^n$, une famille $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ appartenant à $\mathbf{Z}^{*n}$ tels que :

$$g = s_1^{a_1}s_2^{a_2}\cdots s_n^{a_n} \quad \text{et} \quad \forall\, i \in [1, n-1]\,,\ s_i \neq s_{i+1}$$

Il reste le problème de l'unicité. Supposons que g puisse s'écrire sous la forme :

$$g = \sigma_1^{b_1}\sigma_2^{b_2}\cdots\sigma_m^{b_m}$$

avec $m \in \mathbf{N}^*$, $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbf{Z}^{*m}$ et pour tout $i \in [1, m-1]$, $\sigma_i \neq \sigma_{i+1}$. On peut également supposer que m est supérieur ou égal à n. On aura alors :

$$s_1^{a_1}s_2^{a_2}\cdots s_n^{a_n}\sigma_m^{-b_m}\sigma_{m-1}^{-b_{m-1}}\cdots\sigma_2^{-b_2}\sigma_1^{-b_1} = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}} \tag{2}$$

D'après la question **II 3**, une telle égalité n'est possible que si $s_n = \sigma_m$ et si $a_n = b_m$. On peut alors itérer le processus et obtenir successivement, pour $i \in [1, n-1]$:

$$s_{n-i} = \sigma_{m-i},\ a_{n-i} = b_{m-i} \tag{3}$$

La relation (2) se réduit alors à $\sigma_{m-n}^{-b_{m-n}} \cdots \sigma_2^{-b_2} \sigma_1^{-b_1} = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$.
Une telle égalité est impossible si $m - n \geqslant 1$.
Conclusion : $m = n$ et d'après (3), $s_i = \sigma_i$ et $a_i = b_i$, pour tout i appartenant à $[1, n]$.

Question 5 : En général cette question n'a pas été bien traitée : la plupart des candidats l'ayant abordée se contente de vagues explications sur la réunion d'ensembles dénombrables. On pouvait procéder comme suit : $\mathbf{G} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}^*} \mathbf{G}_n$, où :

$$\mathbf{G}_n = \{s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n} \ / \ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{Z}^n \text{ et } (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \{\rho, \tau\}^n\}$$

Or $\mathbf{G}_n$ est dénombrable car image de l'ensemble dénombrable $\mathbf{Z}^n \times \{\rho, \tau\}^n$ par l'application

$$f_n : \mathbf{Z}^n \times \{\rho, \tau\}^n \to \mathbf{G}_n, \ ((a_1, a_2, \ldots, a_n), (s_1, s_2, \ldots, s_n)) \mapsto s_1^{a_1} s_2^{a_2} \cdots s_n^{a_n}$$

Conclusion : $\mathbf{G}$ est dénombrable car union dénombrable d'ensembles dénombrables.

Question 6a) évident : il suffit de trier les éléments de $\mathbf{G}$ distincts de $\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$ selon l'élément de tête.

2.3 Partie III : étude de sous-ensembles de $\mathbf{S}^2$

Plusieurs questions de cette partie étaient relativement faciles à condition de maîtriser un minimum de théorie des ensembles. En particulier quelques connaissances en matière d'ensembles dénombrables permettaient d'avancer rapidement.

Question 1 : il suffisait de se rappeler que si $g \in \mathbf{G} - \{\mathrm{ld}_{\mathbf{E}}\}$, l'axe de g intercepte la sphère $\mathbf{S}^2$ en deux points, de ce fait F apparaît comme une union dénombrable d'ensembles finis. Enfin le caractère non dénombrable de $\mathbf{S}^2$ permet de conclure que X n'est pas vide.

Question 2,3 : ces questions, lorsqu'elles on été abordées, ont rarement été bien comprises. Il n'y avait poutant guère de difficulté :

• Soient $v \in X$ et $g \in \mathbf{G}$. Supposons que $g(v)$ appartienne à F. Dans ce cas il existe $h \in \mathbf{G} - \{\mathrm{Id}_{\mathbf{E}}\}$ tel que $h(g(v)) = g(v)$, donc $g^{-1}hg(v) = v$, avec $g^{-1}hg \in \mathbf{G}$ et $v \in X$. On en déduit que $g^{-1}hg = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, c'est-à-dire $h = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, ce qui est impossible.

Conclusion : pour tout $g \in \mathbf{G}$, $g(X) \subset X$. On a de même $g^{-1}(X) \subset X$, donc $X = g\left(g^{-1}(X)\right) \subset g(X)$. Finalement :

$$\forall\, g \in \mathbf{G},\ g\,(X) = X$$

• Soient $g, h \in \mathbf{G}$ pour lesquels il existe $v \in X$ tel que $g(v) = h(v)$. On a alors $h^{-1}g(v) = v$ et d'après la définition des éléments de X, cela conduit à $h^{-1}g = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, c'est-à-dire $h = g$.

Question 8 :

a) F est dénombrable, donc $F \times F$ aussi ; Λ est dénombrable comme sous-ensemble d'un ensemble dénombrable.

b) $\Gamma_{u,v} = \{w \ / \ d(u, w) = d(v, w)\} \cap \mathbf{S}^2$ est l'intersection du plan médiateur $\pi_{u,v}$ de $[u, v]$ et de $\mathbf{S}^2$. Comme u et v appartiennent à $\mathbf{S}^2$, $\pi_{u,v}$ passe par l'origine. $\Gamma_{u,v}$ est donc un "grand cercle" de $\mathbf{S}^2$.

c) Cette question était plus délicate que les précédentes. Soit $\Gamma = \bigcup_{(u,v) \in \Lambda} \Gamma_{u,v}$.

• Montrons d'abord que $\Gamma \cup F \subsetneq \mathbf{S}^2$. On raisonne par l'absurde : supposons $\Gamma \cup F = \mathbf{S}^2$. On considère alors un cercle γ tracé sur $\mathbf{S}^2$ et qui ne soit pas un grand cercle. On a alors :

$$\gamma = \bigcup_{(u,v) \in \Lambda} (\Gamma_{u,v} \cap \gamma) \cup (F \cap \gamma)$$

Or $\Gamma_{u,v} \cap \gamma$ étant l'intersection de deux cercles *distincts*, il s'agit d'un ensemble fini. Comme Λ est dénombrable, (de même que F et $F \cap \gamma$), on conclut que γ est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables, ce qui est faux.

• Il est clair que F est symétrique par rapport à 0, de même que $\Gamma_{u,v}$, pour tout choix de $(u, v) \in \Lambda$, donc $\Gamma \cup F$ est symétrique par rapport à l'origine.

d) Soit r un élément de $\mathcal{SO}(\mathbf{E})$ dont l'axe D_r ne rencontre pas $\Gamma \cup F$. (une telle droite existe puisque $\Gamma \cup F \subsetneq \mathbf{S}^2$) et d'angle θ tel que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbf{Q}$. On aura alors $r^p \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$, pour tout entier p non nul !

e) Cette question et celle qui suit exigeaient rigueur et précision. Elles ont rarement été bien traitées.
– Soit $(u, v) \in F \times F$ et k un entier strictement positif tels que $r^k(u) = v$.

• $\mathbf{1}^{er}$ **cas :** $u = v$. Dans ce cas $r(u) = u$, autrement dit u est sur l'axe de r, ce qui a été exclu.
• $\mathbf{2}^{ème}$ **cas :** $u \neq v$. Dans ce cas si ω est un vecteur directeur unitaire de l'axe de r :

$$\|v - \omega\| = \left\|r^k(u) - r^k(\omega)\right\| = \|u - \omega\|$$

Il s'ensuit que $\omega \in \Gamma_{u,v}$, avec $(u, v) \in \Lambda$, mais ce cas de figure est exclu par construction de la rotation r.
Conclusion : pour tout $(u, v) \in F \times F$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, $r^k(u) \neq v$, donc $r^k(F) \cap F = \emptyset$.

1. – Soient m et n deux entiers naturels distincts. Supposons par exemple $m < n$. Si $r^n(F) \cap r^m(F)$ n'est pas vide, il existe u et v appartenant à F, tels que

$$r^n(u) = r^m(v) \text{ } i.e. \text{ } v = r^{n-m}(u)$$

et ceci est impossible d'après ce qui précède.

f) On pose

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} r^n(F) \text{ et } Z = \mathbf{S}^2 \setminus Y.$$

Tous les ensembles considérés sont des sous-ensembles de $\mathbf{S}^2$.
– $r(Y) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} r^n(F) = Y \setminus F$ est inclus dans Y ; donc $r(Y) \cap Z = \emptyset$.
– Il est clair que $r(Y) = Y \setminus F$ est inclus dans $\mathbf{S}^2 \setminus F$. Il est également clair que F étant inclus dans X, alors $Y = \mathbf{S}^2 \setminus X$ est inclus dans $\mathbf{S}^2 \setminus F$; donc $r(Y) \cup Z$ est inclus dans $\mathbf{S}^2 \setminus F$.
Inversement, si $x \in \mathbf{S}^2 \setminus F$, de deux choses l'une : ou bien $x \in Y$, donc $x \in Y \setminus F = r(Y)$, ou bien $x \in \mathbf{S}^2 \setminus Y = Z$. En d'autres termes $\mathbf{S}^2 \setminus F$ est inclus dans $r(Y) \cup Z$; *cqfd.*

2.4 Partie IV : équidécomposabilité

Seule la transitivité de la relation $\sim$ posait un problème de rédaction. On pouvait raisonner de la façon suivante :

Soient A, B, C trois sous-ensembles non vides de X tels que $A \sim_{\mathbf{G}} B$ et $B \sim_{\mathbf{G}} C$. Il existe donc une partition finie $(A_i)_{i \in I}$ de A, une partition finie $(B_i)_{i \in I}$ de B et une famille finie $(g_i)_{i \in I}$, d'éléments de $\mathbf{G}$, telles que *:*

$$\forall\, i \in I,\, B_i = g_i(A_i)$$

ainsi qu'une partition finie $\left(B_j^{'}\right)_{j \in J}$ de C, une partition finie $(C_j)_j \in J$ de C et une famille $(h_j)_{j \in J}$ de $\mathbf{G}$ telles que

$$\forall\, j \in J,\, C_j = h_j\left(B_j^{'}\right)$$

On note alors $K = \left\{(i, j) \in I \times J \;/\; B_i \cap B_j^{'} \neq 0\right\}$. Comme il est rappelé dans l'énoncé, la famille $\left(B_i \cap B_j^{'}\right)_{(i,j) \in K}$ est une partition de B. Considérons alors, pour $(i, j) \in K$, $A_i \cap g_i^{-1}\left(B_j^{'}\right)$. C'est un sous-ensemble non vide de X car

$$g_i(A_i \cap g_i^{-1}\left(B_j^{'}\right)) = g_i(A_i) \cap B_j^{'} = B_i \cap B_j^{'} \neq 0$$

De plus on vérifie aisément que la famille $\left(A_i \cap g_i^{-1}\left(B_j^{'}\right)\right)_{(i,j) \in K}$ est une partition de A. De même la famille $(C_j \cap h_j(B_i))_{(i,j) \in K}$ est une partition de C et enfin, pour tout couple (i, j) de K :

$$(h_j g_i)\left(A_i \cap g_i^{-1}\left(B_j^{'}\right)\right) = h_j\left(B_i \cap B_j^{'}\right) = h_j(B_i) \cap C_j$$

ce qui démontre que $A \sim_{\mathbf{G}} C$.

Question 4 : Quelques candidats ont abordé cette question, malheureusement la preuve du caractère bijectif de ψ n'est quasiment jamais bien rédigée.

Soient A et B deux sous-ensembles non vides de X tels que $A \sim_{\mathbf{G}} B$. Il existe donc une partition finie $(A_i)_{i \in I}$ de A, une partition finie $(B_i)_{i \in I}$ de B et une famille finie $(g_i)_{i \in I}$, d'éléments de $\mathbf{G}$, telles que *:*

$$\forall\, i \in I,\, B_i = g_i(A_i)$$

Soit $\psi : A \to B$ définie par ses restrictions aux ensembles A_i :

$$\forall\, i \in I,\, \psi_{|A_i} = g_{i|A_i}$$

On a alors $\psi(A) = \bigcup_{i \in I} \psi(A_i) = \bigcup_{i \in I} g_i(A_i) = \bigcup_{i \in I} B_i = B$. Enfin ψ est injective car si x et y sont deux éléments de A tels que $\psi(x) = \psi(y)$, il existe $i, j \in I$ tels que $x \in A_i$, $y \in A_j$ et $\psi(x) = g_i(x)$, $\psi(y) = g_j(y)$. On en déduit que $g_i(x) = g_j(y) \in B_i \cap B_j$, par conséquent $i = j$ et $g_i(x) = g_i(y)$, donc $x = y$ puisque g_i est une permutation de X.

Conclusion : ψ est une bijection de A sur B. De plus si C est un sous-ensemble non vide de A :

$$C = \bigcup_{i \in I} C \cap A_i,\ \psi(C) = \bigcup_{i \in I} \psi(C \cap A_i) = \bigcup_{i \in I} g_i(C \cap A_i)$$

Or si $J = \{i \in I \ / \ C \cap A_i \neq \emptyset\}$, la famille $(C \cap A_i)_{i \in J}$ est une partition de C, $(g_i(C \cap A_i))_{i \in J}$ est une partition de $\psi(C)$, donc $C \sim_{\mathbf{G}} \psi(C)$.

2.5 Partie V : ensembles paradoxaux

Cette dernière partie nécessitait d'opérer une synthèse de tous les résultats obtenus précédemment. Peu de candidats ont sérieusement abordé cette dernière partie.

II. ÉNONCÉS ET ANALYSE DES ÉPREUVES ÉCRITES

1. Liste des exposés (1re épreuve orale)

EXPOSÉS

01. Utilisation d'arbres, de tableaux, de diagrammes pour des exemples simples de dénombrement. Dénombrement des arrangements et des permutations.
02. Exemples de problèmes dont la résolution fait appel à l'utilisation de graphes, orientés ou non.
03. Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications.
04. Description mathématique d'une expérience aléatoire : ensemble des événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble d'événements élémentaires est fini).
05. Probabilité conditionnelle ; indépendance de deux événements (on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini). Applications à des calculs de probabilité.
06. Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples.
07. Schéma de Bernoulli et loi binomiale. Exemples.
08. Séries statistiques à deux variables numériques. Nuage de points associé. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Droites de régression. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
09. Division euclidienne dans $\mathbf{Z}$, unicité du quotient et du reste. Applications.
10. Congruences dans $\mathbf{Z}$. Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
11. PGCD et PPCM de deux entiers naturels. Nombres premiers entre eux. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
12. Nombres premiers ; existence et unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Exemple(s) d'algorithme(s) de recherche de nombres premiers. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
13. L'anneau $\mathbf{Z}$; sous-groupes additifs de $\mathbf{Z}$. Les idéaux de $\mathbf{Z}$ sont principaux. Egalité de Bézout. Résolution dans $\mathbf{Z}$ d'une équation de la forme $ax + by = c$.
14. Nombres décimaux. Applications.
15. Construction du corps $\mathbf{Q}$ des rationnels.
16. Introduction et construction du corps $\mathbf{C}$ des complexes. Propriétés.
17. Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Applications.
18. Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.
19. Représentation géométrique des nombres complexes. Interprétation géométrique des applications $z \mapsto z+b$, $z \mapsto az$ et $z \mapsto \overline{z}$, où a et b appartiennent à $\mathbf{C}$, a non nul. Exemples d'application l'étude de configurations géométriques du plan.
20. Étude de la fonction $f : z \mapsto \dfrac{z-a}{z-b}$, où a, b, z sont complexes. Lignes de niveau pour le module et l'argument de la fonction f. Applications.
21. Fonction polynôme du second degré à coefficients réels. Mise sous forme canonique ; application à l'étude du sens de variation et à la représentation graphique de la fonction. Équations et inéquations du second degré. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
22. Résolution des systèmes linéaires par opérations élémentaires sur les lignes. Méthode du pivot. Exemples.
23. Caractérisation vectorielle d'une droite du plan. Représentations paramétriques. Génération des demi-droites, des segments. Parallélisme. Orthogonalité.
24. Théorème de Thalès. Projection dans le plan et dans l'espace, caractère affine des projections.
25. Équation cartésienne d'une droite du plan. Problèmes d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes.

26. Équation cartésienne d'une droite du plan euclidien. Application à l'étude d'inéquations de la forme $a \cos t + b \sin t \geqslant c$.
27. Homothéties et translations ; transformation vectorielle associée. Invariants élémentaires : effet sur les directions, l'alignement, les distances... Applications à l'action sur les configurations usuelles.
28. Réflexion du plan échangeant deux points donnés ; médiatrice, régionnement associé. Applications au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit...).
29. Réflexion du plan échangeant deux droites sécantes données, bissectrices. Applications au triangle et au cercle (cercle inscrit, tangentes à un cercle...).
30. Recherche des isométries du plan conservant un carré, un losange, un parallélogramme, un rectangle (dans l'ordre que l'on voudra).
31. Droites remarquables du triangle : bissectrices, hauteurs, médianes, médiatrices... (dans l'ordre que l'on voudra).
32. Rotations planes. Notion d'angle.
33. Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances et d'angles, optimisation...).
34. Définition et propriétés du produit scalaire dans le plan ; expression dans une base orthonormale. Application au calcul de distances et d'angles.
35. Le cercle. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Point de vue géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vue.
36. Théorème de l'angle inscrit : ensemble des points M du plan tels que l'angle orienté de droites ou de demi-droites (MA, MB) soit constant. Cocyclicité. Applications.
37. Relations métriques dans un triangle rectangle. Trigonométrie. Applications.
38. Relations métriques et trigonométriques dans un triangle quelconque. Applications.
39. Produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension trois. Point de vue géométrique, point de vue analytique. Applications.
40. Applications du produit scalaire et du produit vectoriel dans l'espace orienté : calculs de distances, d'aires, de volumes, d'angles...
41. Définition et propriétés du barycentre de n points pondérés. Associativité ; application à la détermination de barycentres attachés des configurations usuelles du plan, de l'espace.
42. Composées d'homothéties et de translations du plan. Relation vectorielle caractéristique. Groupe des homothéties-translations. Applications.
43. Groupe des isométries du plan : décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements, classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants.
44. Étude des transformations du plan euclidien qui conservent les rapports de distances.
45. Recherche des isométries du plan conservant un polygone régulier ; exemples (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone...).
46. Droites et plans dans l'espace. Équations. Positions relatives ; plans contenant une droite donnée.
47. Orthogonalité dans l'espace affine euclidien : droites orthogonales, droite orthogonale à un plan, plans perpendiculaires. Applications.
48. Ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale dans le plan. Applications (en particulier, projection orthogonale d'un cercle sur un plan).
49. Réflexion de l'espace échangeant deux points donnés ; plan médiateur, régionnement associé. Étude des isométries de l'espace ayant une droite de points invariants.
50. Réflexions et rotations de l'espace. Invariants élémentaires : effet sur les distances, les angles... Applications à l'action sur les configurations usuelles.
51. Courbes définies par des équations paramétriques dans le plan. Vecteur dérivé et tangente ; interprétation cinématique.
52. Définitions de la parabole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions. Construction de la tangente et de la normale en un point.

53. Définitions de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.
54. Définitions de l'hyperbole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.
55. Exemples de représentation paramétrique des coniques ; constructions de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse, une hyperbole.
56. Suites monotones, suites adjacentes. Approximation d'un nombre réel, développement décimal. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
57. Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Comparaison de suites entre elles.
58. Rapidité de la convergence d'une suite rélle (u_n) vers une limite ℓ. Cas où $|u_n - \ell|$ est dominé par n^{-a}, par k^n... Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
59. Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie : comparaison, opérations algébriques, composition par une application.
60. Étude des suites de terme général a^n, n^b et $n!$. Croissances comparées. Exemples de comparaison de suites aux suites précédentes. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
61. Étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
62. Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbf{R}$. Opérations algébriques sur les limites. Continuité d'une fonction en un point. Exemples.
63. Limite à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
64. Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.
65. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle de $\mathbf{R}$. Propriétés. Exemples.
66. Méthodes d'approximation d'une solution d'une équation numérique réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
67. Fonctions polynômes.
68. Fonctions logarithmes.
69. Fonctions exponentielles.
70. Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
71. Dérivée en un point. Interprétation géométrique. Exemples.
72. Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivée d'une fonction composée. Exemples.
73. Formules de Taylor. Applications.
74. Développements limités, opérations sur les développements limités.
75. Applications du calcul différentiel à la recherche d'extremums d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
76. Comparaison des fonctions : domination, prépondérance, équivalence. Exemples et applications.
77. Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.
78. Théorème de Rolle. Applications.

79. Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
80. Caractérisation des fonctions exponentielles réelles par l'équation fonctionnelle : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$. Applications.
81. Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre. Exemples.
82. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.
83. Intégration par parties. Exemples de changements de variable. Applications.
84. Diverses méthodes de calcul approché d'intégrales définies. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.
85. Exemples d'approximation d'une solution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

2 . Liste des dossiers (2e épreuve orale)

01. Exemples simples de problèmes de dénombrement dans différentes situations.

02. Exemples d'emploi de dénombrements pour le calcul de probabilités sur un ensemble fini d'épreuves.

03. Exemples de description et d'étude d'expériences aléatoires à l'aide de variables aléatoires.

04. Exemples d'expériences aléatoires et de calcul de probabilités attachées à ces expériences dans les cas des tirages avec ou sans remise. Exemples s'y ramenant.

05. Exemples d'étude de situations faisant intervenir la notion de probabilité conditionnelle.

06. Exemples d'organisation et gestion de données statistiques en collège.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

07. Exemples d'organisation et d'étude d'une série statistique.
Détermination, comparaison, utilisation de mesures de tendance centrale (paramètres de position) et de mesures de dispersion (paramètres de dispersion).
Regroupements en classes. Représentations graphiques usuelles.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

08. Exemples d'introduction à la fluctuation d'échantillonnage, notamment par le moyen de simulations.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

09. Exemples de traitement d'une série statistique à deux variables numériques. Etude du nuage de points associé : point moyen, ajustement affine, droites de régression.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

10. Exemples d'étude de séries de données en classe de Première (diagrammes en boîte, données gaussiennes, séries chronologiques, effet de structure, …).
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

11. Exemples de modélisations et de simulations d'expériences aléatoires.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

12. Exemples d'approches et d'applications du raisonnement par récurrence dans des domaines variés.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

13. Exemples d'étude, au niveau collège, de problèmes conduisant à une équation ou une inéquation du premier degré.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

14. Exemples d'étude, dans les classes de Seconde et Première, de problèmes conduisant à une équation ou une inéquation du second degré.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

15. Exemples d'étude de situations conduisant à des régionnements de la droite ou du plan à partir d'inéquations du premier et du second degré.

16. Exemples d'étude de situations conduisant à un système d'équations linéaires.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

17. Exemples d'étude, au niveau lycée, de situations conduisant à un système d'inéquations linéaires. Applications simples aux problèmes de programmation linéaire à deux variables.

18. Exemples de mise en œuvre du calcul matriciel dans la série ES.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

19. Exemples de modélisations de situations par un graphe au niveau de la Terminale ES.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

20. Exemples de problèmes de constructions illustrant les notions de nombres constructibles et de commensurabilité.

21. Exemples de mise en œuvre des contenus des programmes relatifs aux pourcentages dans les classes de Première.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

22. Exemples d'étude de configurations faisant l'objet de constructions géométriques à la règle et au compas.

23. Exemples d'utilisation des angles orientés. Mise en évidence de l'intérêt de cette notion dans le second cycle.

24. Exemples de recherches et de représentations de sections planes de solides usuels.

25. Exemples de représentations planes d'objets de l'espace : perspective cavalière, perspective à point de fuite.

26. Exemples de présentation, au niveau du lycée, de droites remarquables du tétraèdre : concours des médianes, condition de concours des hauteurs ; cas du tétraèdre régulier.

27. Exemples d'emploi, au niveau du lycée, de transformations pour l'étude de configurations du plan.

28. Exemples d'emploi d'homothéties et de translations pour l'étude de problèmes d'alignement et de concours dans le plan.

29. Exemples d'emploi d'homothéties et de translations pour l'étude de problèmes de constructions géométriques dans le plan.

30. Exemples de problèmes d'alignement et de concours portant sur le triangle.

31. Exemples de présentation, en fin de collège, d'activités récapitulatives sur les calculs de longueurs et de distances dans le plan.

32. Exemples de construction de triangles satisfaisant à des conditions métriques ou géométriques imposées.

33. Exemples d'utilisation de triangles isométriques ou de triangles de même forme (triangles semblables) pour l'étude de configurations du plan. Puis, étude de ces configurations à l'aide d'isométries ou de similitudes.

34. Exemples d'emploi du produit scalaire pour le calcul de distances, d'angles et d'aires dans les configurations usuelles du plan (triangles, polygones, ...).

35. Exemples d'emploi du produit scalaire et du produit vectoriel pour le calcul de distances, angles, aires, volumes, dans les configurations usuelles de l'espace (parallélépipède, tétraèdre, pyramide, ...).

36. Exemples d'emploi du produit scalaire pour la recherche de lieux géométriques dans le plan.

37. Exemples d'applications de différentes expressions du produit scalaire dans l'étude de configurations.

38. Exemples de démonstrations utilisant les aires.
Cas des démonstrations classiques : théorème de Pythagore, théorème de Thalès, …

39. Exemples d'emploi des nombres complexes dans des situations diverses issues des mathématiques, de la physique ...

40. Exemples d'emploi des nombres complexes pour l'étude de configurations en géométrie plane.

41. Exemples d'emploi des nombres complexes pour la recherche de lieux géométriques définis dans le plan par des conditions de distances et d'angles.

42. Exemples dans lesquels un même problème de lieu géométrique dans le plan peut être résolu par différentes méthodes (calcul vectoriel, emploi d'un repère, transformations, nombres complexes, ...).

43. Exemples dans lesquels un même problème d'alignement ou d'orthogonalité dans le plan peut être résolu par différentes méthodes (calcul vectoriel, emploi d'un repère, transformations, nombres complexes, ...).

44. Exemples de présentation, au collège et au lycée, d'activités sur les polygones réguliers usuels.

45. Exemples d'emploi des barycentres pour l'étude de configurations du plan et de l'espace ou la recherche de lieux géométriques.

46. Exemples de recherche et d'étude des isométries laissant invariante une configuration du plan.

47. Exemples de mise en œuvre de différentes méthodes (composition de transformations, nombres complexes, ...) pour la recherche des isométries ou des similitudes directes transformant une configuration usuelle donnée du plan en une autre (triangles, rectangles, ...).

48. Exemples d'emploi de similitudes directes du plan pour l'étude d'une configuration.

49. Exemples de présentation d'exercices sur les coniques (parabole, hyperbole, ellipse) au niveau du lycée.

50. Exemples d'emploi des transformations pour la recherche de lieux géométriques.

51. Exemples d'étude de situations issues de la géométrie, de la mécanique ou de la physique conduisant à des courbes paramétrées.

52. Exemples d'étude de problèmes conduisant à des suites géométriques ou arithmétiques.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

53. Exemples d'étude du comportement de suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

54. Exemples de mise en œuvre de suites adjacentes pour la résolution de problèmes.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

55. Exemples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

56. Exemples de recherche de solutions approchées d'une équation numérique.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

57. Exemples de méthodes d'approximation du nombre π à l'aide de suites, et notamment de suites attachées aux polygones réguliers.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

58. Exemples de méthodes d'approximation du nombre e à l'aide de suites. Irrationalité du nombre e.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

59. Exemples de méthodes d'approximation, à l'aide de suites, du logarithme népérien d'un nombre réel strictement positif ; exemples numériques.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

60. Exemples de méthodes d'approximation, à l'aide de suites, d'un nombre réel positif ; exemples numériques.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

61. Exemples d'étude de phénomènes exponentiels discrets ou continus issus de situations économiques, sociales ou scientifiques.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

62. Exemples d'étude, aux niveaux collège et lycée, d'exercices mettant en évidence les possibilités et les limites d'une calculatrice.
Chacun des exercices proposés devra faire appel à la calculatrice.

63. Exemples de problèmes conduisant à utiliser une calculatrice pour formuler une conjecture ou contrôler des résultats dans différentes situations mathématiques.
Chacun des exercices proposés devra faire appel à la calculatrice.

64. Exemples d'étude de situations conduisant à la mise en œuvre d'une démarche algorithmique au collège et en seconde.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

65. Exemples d’étude de situations conduisant à la mise en œuvre d’une démarche algorithmique au lycée.
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

66. Exemples d’utilisation de formes usuelles du raisonnement (par condition nécessaire, par condition suffisante, par contraposition, par équivalence, par l’absurde, par disjonction des cas ...).

67. Exemples de présentation, en fin de collège, d'activités récapitulatives sur les notions de proportionnalité, de pourcentage, de fonction linéaire, de fonction affine.
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

68. Obtention, en classe de Première, de l’étude et de la représentation graphique de fonctions telles que $f+\lambda$, λf, $x \to f(x+\lambda)$, $x \to f(\lambda x)$, $|f|$, à partir de celle d'une fonction f.
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

69. Exemples d'emploi de majorations et d'encadrements d'une fonction par des fonctions plus simples. Exemples d'emploi d'inégalités sur les dérivées pour obtenir des majorations et encadrements.
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

70. Exemples d'étude du comportement local de fonctions (approximation par une fonction affine ...). Applications.

71. Exemples de mise en évidence de la relation entre la monotonie de la dérivée d'une fonction et la position de sa courbe représentative par rapport aux tangentes.

72. Exemples d'étude de situations décrites au moyen de fonctions (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale ...).
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

73. Exemples d'illustrations, à l'aide de contre-exemples, de l'importance de la vérification des hypothèses lors de l'emploi d'un théorème.
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

74. Exemples d'étude du comportement asymptotique d'une fonction. Applications.
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

75. Exemples d'emploi de la dérivation pour l'étude du sens de variation d'une fonction, du signe d'une fonction ou de la position relative de deux courbes.

76. Exemples d'utilisation de l'étude et de la variation des fonctions pour des problèmes d'optimisation en géométrie (longueurs, aires, volumes).

77. Exemples d'encadrement d'une intégrale au moyen d'un encadrement de la fonction à intégrer ; exemples d'applications à l'obtention d'encadrements d'une fonction.
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

78. Exemples de recherche de primitives par des méthodes variées.

79. Exemples de calcul de valeurs approchées d'intégrales.
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

80. Exemples de calcul d'aires planes à l'aide du calcul intégral.
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

81. Exemples de calcul de volumes de solides usuels.
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

82. Exemples d'étude de situations menant au calcul de la valeur moyenne d'une fonction ou de son carré.
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

83. Exemples de présentation, en Terminale scientifique, d'exercices permettant de retrouver les formules données au collège pour des calculs d'aires ou de volumes.

84. Exemples d'emploi du calcul intégral pour le calcul de grandeurs géométriques, mécaniques ou physiques.
Pour au moins l’un des exercices, la résolution doit faire appel à l’utilisation d’une calculatrice.

85. Exemples d'étude de situations (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale ...) conduisant à une fonction logarithme ou exponentielle.

86. Exemples d'étude de phénomènes continus satisfaisant à une loi d'évolution et à une condition initiale menant à une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre, du second ordre.

87. Exemples de problèmes dont la résolution conduit à des calculs de PGCD ou PPCM de deux entiers naturels.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

88. Exemples de problèmes conduisant à la résolution, pour u et v entiers relatifs, d'équations du type : $au+bv = k$ où a, b, k sont des entiers relatifs.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

89. Exemples d'utilisation de la décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

90. Exemples d'activités sur la nature et l'écriture des nombres en fin de collège et au niveau lycée. Nombres premiers. Applications.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

91. Exemples de présentation et d'utilisation de congruences, au niveau de la Terminale L et de la Terminale S.
Pour au moins l'un des exercices, la résolution doit faire appel à l'utilisation d'une calculatrice.

3 . Analyse des épreuves orales

Les épreuves orales ont été définies par un arrêté ministériel du 30 avril 1991 modifié par un arrêté du 3 août 1993. Les instructions les concernant ont été publiées dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993. Les objectifs communs aux deux épreuves orales sont précisés dans ces paragraphes, extraits des textes cités :

Les épreuves orales visent d'abord à évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement sur un thème donné.
A l'exception des quelques sujets d'exposé (première épreuve) où il est fait référence au programme complémentaire, il convient de se placer au niveau de l'enseignement secondaire, c'est-à-dire de ne pas dépasser le niveau du baccalauréat. Le candidat peut cependant être amené à faire appel aux connaissances acquises dans ses études supérieures pour analyser et commenter la démarche suivie, éclairer un point conceptuel ou technique et situer la question dans son contexte mathématique et scientifique.
La mise en valeur de l'enchaînement des étapes du raisonnement constitue un objectif majeur. Les candidats ne doivent en aucun cas se borner à l'exposé, si parfait soit-il formellement, d'une liste de définition, de théorèmes, d'exemples et d'exercices : il est indispensable de dégager l'articulation mutuelle des divers éléments.

3.1 Commentaires sur la 1° épreuve orale

On rencontre de très belles prestations, mais aussi les plus mauvaises. Les conseils qui suivent se tiennent volontairement à l'écart d'une collection de « perles » ; leur étude doit permettre à tout candidat d'améliorer sa performance, et en même temps ses capacités à exercer le métier d'enseignant.

Modalités pratiques

Rappelons brièvement le déroulement de cette épreuve. Le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets. Il devra choisir l'un des deux sujets et disposera de deux heures pour sa préparation, sans document; le candidat n'annoncera son choix que lors de sa parution devant le jury.

L'épreuve se déroule en deux phases : présentation de la leçon et questions du jury.

- La présentation de la leçon dure 25 minutes, **sans interruption** du jury. Cette première phase consiste à exposer un plan et à effectuer les démonstrations des propositions énoncées. Le plan doit être aussi riche que possible et peut contenir des exemples, contre-exemples et applications des outils introduits. Le candidat peut gérer son tableau à sa guise, néanmoins il serait bon de réserver une partie du tableau pour faire les démonstrations de manière à ce qu'à la fin l'ensemble du plan figure au tableau. Nous rappelons que cette partie ne fait pas un bon effet si elle se réduit à une recopie mot à mot des notes que l'on lit.

- La deuxième phase, d'une durée de 20 minutes, est réservée aux questions du jury. Ces questions peuvent être de divers ordres :

  ✓ rectifier certaines erreurs ou préciser certains points obscurs dans le plan ou dans les démonstrations.

  ✓ vérifier la maîtrise et le recul du candidat sur le sujet traité. En particulier, le candidat est censé répondre sur tous les points présentés dans son plan ainsi qu'à toutes questions relatives au sujet, qu'il aurait omises volontairement ou non.

Remarques sur l'épreuve

D'une manière générale le jury souhaiterait encourager les futurs candidats à donner une touche personnelle à leurs plans, ceci ne peut se faire qu'au prix d'un travail régulier et approfondi durant l'année de préparation. En effet, il serait illusoire de croire pouvoir présenter une leçon solide en se bornant à apprendre par coeur une liste de leçons toutes faites ; cette attitude s'avère être très préjudiciable pour le candidat qui se révèle en général dans l'incapacité de répondre à la moindre question du jury.

- Sur le plan

Les plans doivent être structurés plus rigoureusement, en particulier :

✓ la chronologie est essentielle, elle montre la vue d'ensemble du candidat par rapport à son sujet et permet d'éviter les répétitions et les cercles vicieux.

✓ Le statut des énoncés est fondamental : bien différencier une définition d'une proposition, un corollaire d'un théorème fondamental, etc … Par exemple, bien que cela soit mathématiquement correct, il est maladroit d'énoncer globalement dans un plan « *Une suite croissante de nombres réels est convergente si, et seulement si, elle est majorée* » En effet, la proposition «*Toute suite convergente est majorée* » est très élémentaire alors que la proposition «*Toute suite de nombres réels croissante et majorée est convergente* » qui repose sur le théorème de la borne supérieure (fondement des nombres réels) est non triviale. Ainsi, du point de vue de la genèse des idées, un plan gagnera en clarté si ces deux énoncés sont présentés séparément et hiérarchiquement ; le premier pouvant d'ailleurs servir de motivation pour l'étude du second. D'autre part, il est à noter que beaucoup de candidats parlent du « principe de récurrence » sans avoir conscience qu'il s'agit en fait d’un théorème dont d’ailleurs bon nombre de candidats sont difficilement capables de fournir un énoncé correct. Rappelons à ce sujet qu’une théorie mathématique ne contient pas de « principe » (contrairement à une théorie physique) mais uniquement des axiomes, des définitions et des théorèmes.

- ✓ Les définitions et les énoncés des propositions ou théorèmes doivent être écrits dans leur intégralité ; si le candidat n’écrit qu’une version abrégée, il doit s’attendre à ce que le jury lui demande une version détaillée et complète. Pour économiser du temps d’écriture, le candidat peut éventuellement utiliser des transparents.

Les plans peuvent être enrichis :

- ✓ en introduisant de nombreux exemples et contre-exemples bien choisis montrant pour les théorèmes à la fois, leur impact, la nécessité des hypothèses, les limites à leur application : un simple énoncé correct, c’est évidemment bien ; des développements tels que ceux qui viennent d’être décrits montrent que le candidat possède du recul, et une connaissance en profondeur du sujet traité.
- ✓ en donnant de nombreuses applications, y compris des applications *transversales* au sens où elles concernent, soit des domaines mathématiques différant du domaine usuel dans lequel s’inscrit le sujet, soit plus largement des domaines issus d’autres sciences , sciences physiques, astronomie, sciences naturelles, etc..
- ✓ en montrant des figures. En géométrie cela semble le plus naturel, mais un dessin peut se révéler très utile aussi dans les autres domaines. Les figures peuvent être réalisées à main levée, ou aux instruments, ou encore préparées sur des transparents, ou enfin sur le logiciel de géométrie de la calculatrice.

Le candidat choisit le niveau auquel il place son exposé. En conséquence :

- ✓ sa prestation lors de l’exposé doit rester cohérente avec le niveau qu’il a choisi
- ✓ s’il aborde les diverses notions de manière trop élevée sur le plan « théorique », le jury tentera de vérifier la solidité de l’exposé à un niveau correspondant, et il essayera de faire revenir le candidat aux aspects plus concrets et aux applications plus simples.
- ✓ s’il aborde le sujet à un niveau trop faible, le jury ne se satisfera pas de devoir rester à ce niveau, ce qui amène certains (si de plus ils écoutent mal les questions par la suite) à quitter le jury inconscients de leur médiocre performance

- Sur les démonstrations

Il arrive trop souvent que des candidats présentent un plan sans aucune démonstration. Cette manière de préparer l’épreuve est à proscrire. Rappelons que le candidat est jugé sur le contenu de son plan mais aussi sur sa prestation notamment au cours des démonstrations qui sont faites, en particulier *la pertinence* du choix des points démontrés par rapport au sujet et la *consistance* de ceux-ci sont un élément important d'appréciation. Par exemple, choisir de démontrer le théorème d'existence de la fonction réciproque d'une fonction continue, strictement monotone, sur un intervalle **I** et admettre dans le courant de la preuve la continuité de la fonction réciproque, est plus qu’une maladresse.

D'une manière générale, il est conseillé de :

- ✓ choisir le développement *de plusieurs points consistants, centraux par rapport au sujet*, permettant de montrer son aptitude à raisonner sur les notions étudiées .
- ✓ de montrer ses qualités pédagogiques en s'efforçant de donner la présentation la plus naturelle possible (l'utilisation de figures est recommandée chaque fois que cela est possible), faisant ressortir clairement la démarche scientifique utilisée et en mettant bien en relief les points cruciaux des différentes preuves; beaucoup de candidats se contentent d'aligner une suite de raisonnements, présentés artificiellement, sans être capable d'expliquer l'origine de leurs motivations.
- ✓ de bien vérifier l'absence de lacune dans l'enchaînement logique de la démonstration; il arrive souvent qu'un candidat se trouve complètement désarçonné lorsqu'on lui demande d'éclaircir certains passages, ce qui lui fait découvrir des difficultés qui lui avaient échappé.

- Sur les questions du jury

Les questions du jury peuvent porter aussi bien sur la conception, l'organisation du plan, que sur les démonstrations, abordées ou non, au cours de l'exposé. Elles peuvent également porter sur les pré-requis ou concerner certains prolongements omis, soit pour s'assurer de la solidité des connaissances, soit pour compléter un plan trop pauvre.

Nous insistons sur le fait qu'il est essentiel que les candidats aient un certain recul sur les notions qu'ils devront enseigner et ne peuvent donc en aucun cas se contenter de ne connaître que ce qui est exigible pour un élève du secondaire actuel. Par exemple, s'il est normal d'admettre lors d'un exposé le théorème « *Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle* » il est insuffisant de la part du titulaire d'une licence qu'il n'ait pas la moindre idée sur la façon de prouver ce résultat. De même, si la définition rigoureuse des angles est hors de portée d'un élève il n'est pas acceptable qu'un futur enseignant n'y ait jamais réfléchi au point d'être incapable de fournir la moindre piste pour attaquer ce délicat problème, ou plus grave ne pas sembler comprendre l'importance de la question qui se pose.

L'entretien commence le plus souvent par la mise au point et la correction d'erreurs de détail, notamment de lapsus ou d'erreurs bénignes, de confusions de notation, etc. Le candidat ne doit pas penser que ces questions constituent des pièges. Dans la suite de l'entretien, il est important d'écouter réellement les questions : d'une part, une question mal écoutée et à laquelle on répond de manière précipitée risque de se conclure par des réponses inadaptées, et une situation défavorable au candidat ; d'autre part, on attend du futur professeur qu'il écoute et analyse les questions de ses futurs élèves, et pour cela, il lui faudra aussi « savoir écouter ».

Les questions ne sont pas de niveau constant : le jury peut souhaiter, par des questions très élémentaires, mettre le candidat en confiance ; par des questions plus profondes, il peut souhaiter donner au candidat la possibilité de montrer qu'il dispose de recul par rapport au sujet traité. Une erreur, une réponse erronée n'est pas nécessairement catastrophique : si le candidat, alerté par d'autres questions du jury, s'aperçoit de son erreur et est capable de la corriger, il laissera l'impression positive d'un futur enseignant capable de réagir valablement lorsqu'il est en difficulté.

3.2 Commentaires sur la 2° épreuve orale, forme 2004

On rappelle ici que l'épreuve sous sa forme actuelle disparaît après cette session. Les commentaires qui suivent concernent donc d'abord les candidats qui désirent comprendre comment l'épreuve s'est passée.
Cela dit, beaucoup parmi les remarques de portée générale resteront valables dans le cadre de la nouvelle formule

Préparation de l'épreuve

Les candidats doivent être attentifs dans le choix de leurs exercices. Trop d'exercices hors sujet conduisent à une note inférieure à la moyenne. Il est préjudiciable, par exemple de proposer des problèmes de construction ou d'études de lieux dans un sujet concernant l'étude de configurations.

Un nombre important de candidats se contentent de recopier sans changement des exercices extraits de manuels ou d'annales d'examens. Ces exercices sortis de leur contexte pédagogique peuvent ainsi devenir totalement artificiels dans le cadre du sujet. La référence à un manuel ou à un examen ne justifie en rien le choix d'un exercice.

Si le candidat limite son choix à des exercices trop élémentaires, cela risque de l'empêcher de valoriser ses connaissances, de montrer qu'il maîtrise les bases théoriques et les concepts mathématiques mis en jeu.

Un choix original est valorisant. Un regard critique sur les exercices proposés dans les manuels scolaires est particulièrement appréciable, lorsqu'il devient judicieux de modifier l'énoncé pour mieux répondre à la problématique posée par le sujet.

Si les indications fournies en annexe ne sont ni exhaustives ni impératives il apparaît que peu de candidats prennent appui sur ces extraits de programme. S'il est normal que certains n'aient pas une connaissance fine des programmes, un minimum est attendu sur l'objectif des exercices choisis, les difficultés intrinsèques et des prolongements possibles ou des ouvertures à des généralisations.

La présentation des exercices

Le temps imparti permet largement de :
- Montrer une bonne compréhension du dossier.
- D'exposer les objectifs.
- Présenter les outils mis en jeu, les méthodes et les finalités des exercices.

Certains candidats cherchent à combler artificiellement le temps imparti en commentant ligne à ligne les exercices ou en les recopiant au tableau voire en développant l'exposé en le transformant en un exposé sur la notion mathématique liée au dossier. Ces pratiques n'apportent rien et risquent même d'être défavorables au candidat qui les emploie.

Durant cette présentation le jury essaie de repérer les capacités du candidat à communiquer. Une fiche d'exercices bien présentée, une orthographe correcte, une bonne élocution et une attitude dynamique sont des éléments appréciés. Il est regrettable de constater que beaucoup de candidats passent la majeure partie du temps d'exposé dos tourné au jury en recopiant leurs notes au tableau.

L'utilisation de transparents était autorisée cette année pour la première fois., encore peu pratiquée, cette technique peut permettre de disposer rapidement de figures claires, bien construites et est susceptible de valoriser la prestation du candidat.

IV. CONCLUSION

Le travail d'un jury de concours tel que celui-ci a des répercussions importantes et durables si l'on considère qu'il s'agit de recruter les futurs enseignants de collège et de lycée. A côté d'autres voies d'accès adaptées aux personnels déjà en situation d'enseignant, le concours externe « donne le ton » pour les jeunes étudiants en ce qui concerne les exigences attendues en matière de recrutement.

La situation actuelle permet tout à la fois de maintenir un niveau d'exigence raisonnable et de pourvoir tous les postes. En ce sens elle est tout à fait satisfaisante.

Plus délicat est le pilotage de l'évolution du concours.

L'introduction des TICE se heurte à de nombreux obstacles, tant matériels que docimologiques, et le passage d'une épreuve orale sur ordinateur n'est pas encore à l'ordre du jour. Pour y suppléer en partie, l'utilisation pendant les épreuves orales de calculatrices performantes a été fortement encouragée ces dernières années. La rénovation des matériels est devenue effective et à peu près continue depuis l'introduction de prêts gracieux par les constructeurs (trois constructeurs étaient présents, Casio, Hewlett-Packard, Texas Instruments). L'introduction de tablettes de rétroprojection a suivi. Le nombre des sujets pour lesquels l'utilisation d'une calculatrice est encouragé ou imposé s'est accru, et en réponse, le taux d'utilisation par les candidats augmente de manière significative.

L'évolution des sujets doit suivre celle des programmes ; cependant, le choix proposé aux candidats a pour effet un délaissement de certaines parties des programmes « mal-aimées » par les candidats comme elles le sont parfois aussi, il faut le dire, par les membres du jury. Ceci contredit une évolution raisonnablement rapide des sujets réellement traités (et donc préparés) par les candidats. Même si le contenu mathématique de telle ou telle leçon reste mathématiquement inattaquable et intrinsèquement intéressant, il arrive qu'il faille s'en séparer pour l'évaluation au concours, et faire apparaître de nouvelles directions présentes et encouragées dans les programmes. Le devoir du jury est de suivre aussi précisément que possible ces évolutions.

C'est pour ces raisons qu'a été proposée la modification de la note définissant les épreuves orales , modification qui prend effet en 2005. D'une part, les calculatrices seront nécessairement plus sollicitées que dans la forme précédente lorsque le dossier fourni par le jury contiendra des indictions plus précises à ce sujet. D'autre part, la confection par le jury des dossiers permettra un suivi plus rapide des évolutions nécessaires.

Je tiens à remercier tous les membres du jury pour leur disponibilité et pour la motivation dont ils ont fait preuve afin de réussir une session satisfaisante à tous points de vue, ainsi que tous nos partenaires du Ministère, du Lycée Lakanal et du SIEC pour leur efficacité et leur aide.

V. ANNEXES

5.1 Bibliothèque du C.A.P.E.S.

5.1.1 Programmes (documents disponibles dans les salles de préparation, utilisables pour les deux épreuves orales)

B.O. hors série n°2 du 30/08/01 : Programme de seconde générale et technologique.
B.O. hors série n°8 du 31/08/00 : Programme de Première ES.
B.O. hors série n°7 du 31/08/00 : Programme de mathématiques-informatique, Première L.
B.O. hors série n°3 du 31/08/01 : Programme pour l'option facultative, Première L.
B.O. hors série n°7 du 31/08/00 : Programme de Première S.
B.O. spécial 2 du 02/05/91 : Programme de 1ère SMS, STI (sauf spécialités "Arts appliqués" et "Génie optique") et STL.
B.O. hors série n°8 du 02/10/97 : Programme de 1ère STI spécialités "Arts appliqués" et "Génie optique".
B.O. hors série du 24/09/92 : Programme de 1ère STT (tome III, brochure 1).
B.O. hors série n°4 du 30/08/01 : Programme de Terminale ES.
B.O. hors série n°3 du 30/08/01 : Programme pour l'option facultative de Terminale L.
B.O. hors série n°4 du 30/08/01 : Programme de Terminale SMS, STI, STL et STT.
B.O. spécial n°8 du 07/07/94 : Programme de Terminale STI (sauf spécialités "Arts appliqués" et "Génie optique").
B.O. hors série n°8 du 02/10/97 : Programme de Terminale STI spécialités "Art appliqués" et "Génie optique".
B.O.E.N. spécial n°8 du 07/07/94 : Programme de Terminale SMS.

5.1.2 Ouvrages disponibles seulement pour l'épreuve sur dossier)

Ouvrages généraux

NIVEAU	SERIE	TITRE	REM	AUTEURS	ANNEE	EDITEUR
COL		ENSEIGNER LA GEOMETRIE		COUSIN-FAUCONNET	1995	ARMAND COLIN
COL		LE CALCUL LITTERAL			1999	IREM
COL		PETIT X N°44			1996	IREM
COL		PETIT X N°4			1984	IREM
COL		GESTION DE DONNEES ET STAT			1997	IREM
COL		PETIT X N°40			1995	IREM
COL		DES CHIFFRES ET DES LETTRES			1991	IREM
COL		AUTOUR DE THALES			1995	IREM
LYC		ENSEIGNER LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE N°99			1995	APMEP
LYC		L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES		ROBERT,LATTUATI ,PENNINCKX	1999	ELLIPSES
LYC		GEOMETRIE		GAUTIER,COLOMB …	1999	ELLIPSES
LYC		MATHS ET SCIENCES ECO ET SOCIALES			1996	IREM
LYC		POUR UNE PRISE EN COMPTE DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES EN ANALYSE			1998	IREM
LYC		FAIRE DES MATHS AVEC DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES		TROUCHE	1998	IREM
LYC		LA GEOMETRIE PLANE			1989	IREM
LYC		MATHS ET FILIERE ECO ET SOCIALE			1996	IREM
LYC		AIMER FAIRE DES MATHS 3			1996	IREM
LYC		AIMER FAIRE DES MATHS 4			1997	IREM
LYC		AIMER FAIRE DES MATHS 5			1998	IREM
GEN	SHAUM	THEORIE ET APPLICATIONS DE LA STATISTIQUE		MURRAY R.SPIEGEL	1972	MC GRAW-HILL
GEN		LE NOMBRE PI		ADCS	1992	ACDS
GEN		HISTOIRE D'ALGORITHMES:DU		CHABERT,BARBIN	1993	BELIN

		CAILLOU A LA PUCE		…		
GEN		ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES			1989	CRDP
GEN		COURS DE CALCUL DES PROBABILITES		CALOT	1967	DUNOD
GEN		STATISTIQUE DESCRIPTIVE-TD	(APPLICATIONS EXCEL)	MONINO,KSIANSKI, LE CORNU	2000	DUNOD
GEN		EXERCICES DE CALCUL DES PROBABILITES		CALOT	1986	DUNOD
GEN		LES OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES:REFLEXES ET STRATEGIES		BELHAJ SOULAMI	1999	ELLIPSES
GEN		GEOMETRIE		CARRAL	1995	ELLIPSES
GEN		TOPOLOGIE GENERALE ET ANALYSE FONCTIONNELLE		SCHWARTZ	1970	HERMAN N
GEN		METHODES MATHS POUR LES SCIENCES PHYSIQUES		SCHWARTZ	1965	HERMAN N
GEN		GROUPES ET GEOMETRIES		SENECHAL	1979	HERMAN N
GEN		METHODES MODERNES EN GEOMETRIE		FRESNEL	1996	HERMAN N
GEN		APPROXIMATION ET OPTIMISATION		LAURENT	1972	HERMAN N
GEN		LA GEOMETRIE DU TRIANGLE		SORTAIS	1994	HERMAN N
GEN		ABREGE D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES		DIEUDONNE	1986	HERMAN N
GEN		CALCUL INFINITESIMAL		DIEUDONNE	1980	HERMAN N
GEN		GEOMETRIE DE L'ESPACE ET DU PLAN		SORTAIS	1988	HERMAN N
GEN		AUX ORIGINES DU CALCUL INFINITESIMAL		CERCLE D'HISTOIRE DES SCIENCES	1999	IREM
GEN		POURQUOI PAS DES MATHEMATIQUES			2000	IREM
GEN		ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES 1			1999	IREM
GEN		PROBLEME DE MISE EN EQUATIONS			1996	IREM
GEN		DES STATISTIQUES A LA PENSEE STATISTIQUE			2001	IREM
GEN		ANGLES ROTATIONS			1993	IREM
GEN		APPORTS DE L'OUTIL INFO…A LA GEOMETRIE			1994	IREM
GEN		LE VRAI ET LE FAUX		GANDIT	2001	IREM
GEN		ALGORITHMIQUE &TRADUCTION POUR CALCULATRICES		DE GRAEVE	2001	IREM
GEN		RALLYE:PRÊT A AFFRONTER L'EPREUVE DE MATH			1998	IREM
GEN		HISTOIRE DES MATHS POUR NOS CLASSES			1991	IREM
GEN		INITIATION A LA CRYPTOLOGIE		COHEN,OLIVIER	2000	IREM
GEN		LA JUBILATION EN MATHS		DELEDICQ	2001	IREM
GEN		POURQUOI AIMER ENCORE FAIRE DES MATHS			1994	IREM
GEN		FRAGMENTS D'ARITHMETIQUE			1999	IREM
GEN		UNE HISTOIRE DE CONIQUES			1996	IREM
GEN		ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES 2			1999	IREM
GEN		SIMILITUDES			1999	IREM
GEN		INITIATION A L'ARITHMETIQUE			1999	IREM
GEN		MATHS:APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES TOME 2			1990	IREM
GEN		INFO-MATHIC:ACTIVITES MATHS DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE			1998	IREM
GEN		MATHS:APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES			1986	IREM
GEN		MATHS:APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES TOME 3			2001	IREM
GEN		AIMER ENCORE FAIRE DES MATHS 2			1995	IREM
GEN		EXERCICES DE GEOMETRIE ELELMENTAIRE		TRUFFAULT	1996	IREM
GEN		AIRES			2000	IREM
GEN		LES CONIQUES			1997	IREM
GEN		COURS DE GEOMETRIE ELEMENTAIRE		TRUFFAULT,VOGE L	1995	IREM
GEN		ENSEIGNER L'ARITHMETIQUE			2000	IREM
GEN		LA RECURSIVITE EN GEOMETRIE:LES FRACTALS		CUPPENS	1986	IREM
GEN		MATHEMATIQUES AU FIL DES AGES		GROUPE EPISTEMOLOGIE ET	1987	IREM

				HISTOIRE		
GEN		METHODES DE MATHS ET PROGRAMMATION		NIZARD	1988	LAVOISIER TEC &DOC
GEN		ELEMENTS D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES		BOURBAKI	1984	MASSON
GEN		METHODES NUMERIQUES		BAKHVALOV	1976	MIR MOSCOU
GEN		RECUEIL D'EXERCICES ET DE PROBLEMES D'ANALYSE MATHEMATIQUES		DEMIDOVITCH	1965	MIR MOSCOU
GEN		EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES		CLERO	1990	NATHAN
GEN		PROBABILITES ET INFERENCE STATISTIQUE		ABBOUD,AUDROING	1989	NATHAN
GEN		DICTIONNAIRE DES MATHEMATIQUES		BOUVIER,GEORGE, LE LIONNAIS	1996	PUF
GEN		SUITES ET SERIES		COMBES	1982	PUF
GEN		ALGEBRE LINEAIRE ET APPLICATIONS TOME 1		MASCART,STOKA	1984	PUF
GEN		ALGEBRE LINEAIRE ET APPLICATIONS TOME 2		MASCART,STOKA	1985	PUF
GEN		LE CALENDRIER		COUDERC	1986	QUE SAIS-JE?
GEN		LES NOMBRES ET LEURS MYSTERES		WARUSFEL	1961	SEUIL
GEN		STATISTIQUE ET CALCUL DES PROBABILITES		MASIERI	1988	SIREY
GEN		LE CERCLE D'EULER		COLLET,GRISO	1987	VUIBERT
GEN		DICTIONNAIRE DES MATHEMATIQUES		BOUVIER GEORGE LE LIONNAIS	1996	PUF
GEN		ENSEIGNER LES STATS DU CM A LA SECONDE.POURQUOI?COMMENT?			1998	IREM

Ouvrages d’enseignement supérieur

SUP	1erCYCLE	LES MATHEMATIQUES DE A A Z	LARROCHE,LAURENT	2002	DUNOD
SUP	1erCYCLE	LES SERIES	DELMER	1995	DUNOD
SUP	2ème ANNEE	BEST OF MATHEMATIQUES:LES MEILLEURS SUJETS DE CONCOURS	BOUTILLON	2000	DUNOD
SUP	2ème CYCLE	CALCUL DIFFERENTIEL ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES	AZE,CONSTANS,HIRIART-URRUTY	2002	DUNOD
SUP	2ème CYCLE	THEORIE DES GROUPES	DELCOURT	2001	DUNOD
SUP	2ème CYCLE	INTRODUCTION A LA LOGIQUE	DAVID,NOUR,RAFFALLI	2001	DUNOD
SUP	2ème CYCLE, AGREG, EI	ANALYSE NUMERIQUE	HERON,PICARD,ISSARD-ROCH	1999	DUNOD
SUP	2ème CYCLE, AGREG, EI	PROCESSUS STOCHASTIQUES:PROCESSUSDE POISSON,CHAINES DE MARKOV ET MARTINGALES	FOATA,FUCHS	2002	DUNOD
SUP	2ème CYCLE, EI	CALCUL DIFFERENTIEL POUR LA LICENCE	DONATO	2000	DUNOD
SUP	2ème CYCLE, EI	CALCUL SCIENTIFIQUE	SAINSAULIEU	2000	DUNOD
SUP	2ème CYCLE, EI	ANALYSE NUMERIQUE ET EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES	NICAISE	2000	DUNOD
SUP	2èmeCYCLE	STATISTIQUE INFERENTIELLE	FOURDRINIER	2002	DUNOD
SUP	2èmeCYCLE	ELEMENTS D'INTEGRATION ET D'ANALYSE FONCTIONNELLE	EL KACIMI ALAOUI	1999	ELLIPSES
SUP	2èmeCYCLE,EI,AGREG	ANALYSE ET GEOMETRIE:METHODES HILBERTIENNES	ROOS	2002	DUNOD
SUP	AGREG	COURS D'ANALYSE:ANALYSE REELLE ET INTEGRATION	DOUKHAN,SIFRE	2001	DUNOD
SUP	AGREG	COURS D'ALGEBRE	TAUVEL	1999	DUNOD
SUP	AGREG	TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE	GONNORD,TOSEL	1996	ELLIPSES
SUP	AGREG	LECONS D'ALGEBRE(PREPARATION A L'ORAL)	MADERE	1998	ELLIPSES
SUP	AGREG	CALCUL DIFFERENTIEL(THEMES D'ANALYSE)	GONNORD,TOSEL	1998	ELLIPSES
SUP	AGREG	COURS D'ALGEBRE	PERRIN	1996	ELLIPSES
SUP	AGREG	MODELISATION A L'ORAL DE L'AGREG:CALCUL SCIENTIFIQUE	DUMAS	1999	ELLIPSES
SUP	AGREG	THEMES D'ANALYSE	EXBRAYAT,ALESSANDRI	1997	MASSON
SUP	AGREG	ALGEBRE POUR L'AGREGATION INTERNE	TAUVEL	1996	MASSON
SUP	AGREG	ELEMENTS D'ANALYSE	ZUILY,QUEFFELEC	1995	MASSON
SUP	ANNEES 1&2	MATHEMATICA	COOMBES ET AL.	2000	DUNOD
SUP	ANNEES 1&2	SYSTEME D - ANALYSE	SOROSINA	1999	DUNOD
SUP	CAPES	EPREUVE ORALE D'EXPOSE:33 LECONS POUR SE PREPARER EFFICACEMENT	BAJOU,SAINT-LANNES,SORBE	2003	DUNOD
SUP	CAPES	GEOMETRIE AFFINE ET EUCLIDIENNE	DELODE	2000	DUNOD
SUP	CAPES	ANALYSE ET PROBAS:ECRITS 1996-97(avec rappels de cours)	CHRISTOL,DECOMPS-GUILLOUX,PIQUET	1999	DUNOD
SUP	CAPES	ALGEBRE ET GEOMETRIE:ECRITS 1996-99(avec rappels de cours)	BORIES-LONGUET,JARRAUD	1999	DUNOD
SUP	CAPES	NOS 20 SUJETS PREFERES	BORIS-LONGUET,DECOMPS-GUILLOUX,JARRAUD,MELEARD,PIQUET	2000	DUNOD
SUP	CAPES	L'EPREUVE SUR DOSSIER A L'ORAL:GEOMETRIE	ROBERT	1995	ELLIPSES
SUP	CAPES	L'EPREUVE SUR DOSSIER A L'ORAL:ANALYSE	LAMBRE	1998	ELLIPSES
SUP	CAPES	ALGEBRE ET GEOMETRIE:ECRITS 1991-96(avec rappels de cours)	BORIES-LONGUET,JARRAUD,LEVY-BRUHL	1997	MASSON

SUP	CAPES	ANALYSE ET PROBAS:ECRITS 1991-96(avec rappels de cours)		MELEARD,PIQUET,DECOMPS-GUILLOUX	1997	MASSON
SUP	CAPES	ANALYSE(avec rappels de cours)		LEVY-BRUHL,PIQUET,SERVIEN, VAUTHIER	1987	MASSON
SUP	CAPES	ALGEBRE ET GEOMETRIE		LEVY-BRUHL,PIQUET,SERVIEN, VAUTHIER	1987	MASSON
SUP	CAPES	34 PB CORRIGES POSES A L'ECRIT DU CAPES		CHEVALLET	1999	VUIBERT SUP
SUP	CAPES & AGREG	STRUCTURES ALGEBRIQUES EN GEOMETRIE		AIME	1999	ELLIPSES
SUP	CAPES & AGREG	GEOMETRIE:COURS ET EXERCICES CORRIGES		BIGARD	1998	MASSON
SUP	CAPES & AGREG	ALGEBRE LINEAIRE(COURS ET EXERCICES)		ROUDIER	2003	VUIBERT
SUP	CAPES & AGREG INTERNE	COMPLEMENTS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE		DE BIASI	2000	ELLIPSES
SUP	CAPES & AGREG INTERNE	MATHEMATIQUES POUR LE CAPES ET L'AGREG INTERNE		DE BIASI	1998	ELLIPSES
SUP	CAPES &AGREG INTERNE	MATHEMATIQUES POUR LE CAPES ET L'AGREG INTERNE		DE BIASI	1995	ELLIPSES
SUP	CNAM	INITIATION A L'ANALYSE NUMERIQUE		THEODOR	1989	MASSON
SUP	CYCLES 1&2,EI	TOUTES LES MATHEMATIQUES		STÖCKER	2002	DUNOD
SUP	DEUG	MATHEMATIQUES		DELMER	1996	DUNOD
SUP	DEUG	FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES ET INTEGRATION		DELMER	1997	DUNOD
SUP	DEUG 1	EXERCICES D'ANALYSE:CALCUL INTEGRAL		BOSCHET	1997	MASSON
SUP	DEUG A1	ENSEIGNER AUTREMENT LES MATHEMATIQUES			1990	IREM
SUP	DEUG MIAS/MASS	ALGEBRE GENERALE,TD		DENMAT,HEAULME	2000	DUNOD
SUP	DEUG MIAS/MASS	BEST OF ANALYSE 1èreANNEE		PARZYSZ	2001	DUNOD
SUP	DEUG MIAS/MASS/SM	ALGEBRE 1èreANNEE		LIRET,MARTINAIS	1997	DUNOD
SUP	DEUG MIAS/MASS/SM	ANALYSE 1èreANNEE		LIRET,MARTINAIS	1997	DUNOD
SUP	DEUG MIAS/MASS/SM	ANALYSE 2èmeANNEE		LIRET,MARTINAIS	1998	DUNOD
SUP	DEUG MIAS/MASS/SM	ANALYSE 2èmeANNEE		PROCHASSON	2000	DUNOD
SUP	DEUG MIAS/MASS/SM	ALGEBRE ET GEOMETRIE 2èmeANNEE		PROCHASSON	2001	DUNOD
SUP	DEUG SVT	ANALYSE		BLONDEL	2000	DUNOD
SUP	DEUG1	EXERCICES D'ANALYSE:176 EXERCICES ET 105 TESTS CORRIGES(avec rappels de cours)		SCHMITT	1997	MASSON
SUP	DEUG1	FONCTIONS D'UNE VARIABLE		CALVO	1997	MASSON
SUP	DEUG1 SM	COURS DE MATHEMATIQUES		DIXMIER	1976	GAUTHIER-VILLARS
SUP	DEUG2 SM	COURS DE MATHEMATIQUES		DIXMIER	1977	GAUTHIER-VILLARS
SUP	LICENCE	ALGEBRE 3èmeANNEE		SCHWARTZ	2003	DUNOD

SUP	LICENCE	TOPOLOGIE ET ANALYSE		SKANDALIS	2001	DUNOD
SUP	LICENCE 1 MIAS/MASS/SM	ALGEBRE 1èreANNEE		LIRET,MARTINAIS	2003	DUNOD
SUP	LICENCE 1 MIAS/MASS/SM	ANALYSE 1èreANNEE		LIRET,MARTINAIS	2003	DUNOD
SUP	LICENCE 3,MASTER1,EI	INTRODUCTION A L'ANALYSE NUMERIQUE:APPLICATIONS SOUS MATLAB		BASTIEN,MARTIN	2003	DUNOD
SUP	LICENCE1 MIAS/MASS/SM	LES MATHEMATIQUES EN LICENCE TOME1		AZOULAY,AVIGNANT,AULIAC	2003	EDISCIENCE
SUP	MAITRISE	INTRODUCTION A L'ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE ET A L'OPTIMISATION		CIARLET	1988	MASSON
SUP	MAITRISE	INTRODUCTON A L'ANALYSE NUMERIQUE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES		RAVIART,THOMAS	1988	MASSON
SUP	MASTER,EI	SIMULATION NUMERIQUE EN C++		DANAILA,HECHT,PIRONNEAU	2003	DUNOD
SUP	MASTER 1&2,AGREG	INTRODUCTION A LA THEORIE SPECTRALE		LEVY-BRUHL	2003	DUNOD
SUP	MP	L'ORAL(ENTRAINEMENT AUX CONCOURS		MONIER	2002	DUNOD
SUP	PREPA 1	ANALYSE 1-COURS TOME 1		MONIER	1997	DUNOD
SUP	PREPA 1	ANALYSE 2-COURS TOME 2		MONIER	1996	DUNOD
SUP	PREPA 1	ALGEBRE 1		MONIER	2000	DUNOD
SUP	PREPA 1&2	GEOMETRIE		MONIER	2000	DUNOD
SUP	PREPA 2	ALGEBRE 2 -COURS TOME 6		MONIER	1998	DUNOD
SUP	PREPA 2	ANALYSE-TOME 3		MONIER	1997	DUNOD
SUP	PREPA 2	ANALYSE4-TOME 4		MONIER	1997	DUNOD
SUP	PREPA1	ALGEBRE 1-COURS TOME 5		MONIER	1996	DUNOD
SUP	PREPA1 &2	GEOMETRIE-TOME7		MONIER	1997	DUNOD
SUP	PREPA2	MATHEMATIQUES 2ème ANNEE		DESCHAMPS,WARUSFEL...	2001	DUNOD
SUP	PREPA2	ANALYSE 3-COURS TOME 3		MONIER	1997	DUNOD
SUP	STS-IUT	SERIES DE FOURIER,TRANSFORMATION DE LAPLACE		BENICHOU,BOY,POUGET	1995	ELLIPSES
SUP		ANALYSE		BLONDEL	2000	DUNOD
SUP		LE NOMBRE D'OR ET LES NOMBRES DE FIBONACCI		MEYER STEYAERT	1981	IREM
SUP		PROBAS ET STATS			1996	IREM
SUP		L'ENSEIGNEMENT DES STATS ET PROBAS			1999	IREM
SUP		RMS			1998/99	VUIBERT

Manuels scolaires

6		DECIMALE			1996	BELIN
6		MATH ET CLIC			2000	BORDAS
6		NUL EN MATHS ?			1997	BORDAS
6		MATHS			1996	BORDAS
6		MATH ET CLIC	PROF		2000	BORDAS
6		DIMATHEME			2000	DIDIER
6		100 PROBLEMES SANS PEINE			1998	HACHETTE
6		CINQ SUR CINQ			1994	HACHETTE
6		ALPHA			1994	HATIER
6		TRIANGLE			96/00	HATIER
6		DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT			1996	M.E.N.
6		TRANSMATH			1996	NATHAN
5		DECIMALE			1997	BELIN
5		MATHS JAUNE			1997	BORDAS
5		MATHEMATIQUES		SERRA	2001	BORDAS
5		MATHEMATIQUES	PROF	CORRIEU BATIER		DELAGRAVE
5		DIMATHEME			1997	DIDIER
5		DIMATHEME			2001	DIDIER
5		CINQ SUR CINQ			97/00	HACHETTE
5		NOUVEAU PYTHAGORE	PROF		1997	HATIER
5		TRIANGLE	PROF		1997	HATIER
5		TRANSMATH			1997	NATHAN
5		TRANSMATH	PROF		2001	NATHAN
4		DECIMALE			1998	BELIN
4		MATHEMATIQUES			1998	BORDAS
4		MEDIAMATH			2002	BORDAS
4		METHODES EN PRATIQUE			1988	CRDP
4		DIMATHEME			1998	DIDIER
4		DIMATHEME			2002	DIDIER
4		TOUT SIMPLEMENT			1998	HACHETTE
4		CINQ SUR CINQ			2002	HACHETTE
4		CINQ SUR CINQ			1998	HACHETTE
4		DIABOLO			2003	HACHETTE
4		TRIANGLE			1998	HATIER
4		NOUVEAU PYTHAGORE			1998	HATIER
4		TOUT LE PROGRAMME EN 300 EXERCICES			1997	HATIER
4		SUIVI SCIENTIFIQUE		IREM	1988	INTER IREM
4		NOUVEAU TRANSMATH	PROF		1998	NATHAN
4		TRANSMATH	PROF		2002	NATHAN
4		TRANSMATH			1988	NATHAN
3		COMPRENDRE ET REUSSIR			1997	BELIN
3		METHODES EN PRATIQUE			1989	CRDP
3		DIMATHEME			1999	DIDIER
3		CINQ SUR CINQ	PROF		2003	HACHETTE
3		CINQ SUR CINQ			1999	HACHETTE
3		TOUT SIMPLEMENT			1999	HACHETTE
3		NOUVEAU PYTHAGORE	PROF		1999	HATIER
3		TRIANGLE			1999	HATIER
3		TRIANGLE	PROF		2003	HATIER
3		SUIVI SCIENTIFIQUE		IREM	1989	INTER IREM
3		MATHEMATIQUES			1999	BORDAS
3		DIABOLO			2004	HACHETTE
2		MATHEMATIQUES			1998	BELIN
2		INDICE			2000	BORDAS
2		MATHEMATIQUES	PROF		2000	BREAL
2		MATHEMATIQUES			2000	BREAL
2		MODULOMATH			2004	DIDIER
2		DIMATHEME			2000	DIDIER
2		REPERES			2004	HACHETTE
2		PYRAMIDE			2000	HACHETTE

2		DECLIC			1998	HACHETTE
2		SIGMATH			1998	HATIER
2		ENONCES ET SCENARIOS			1993	INTER IREM
2		LIAISON COLLEGE SECONDE			1990	INTER IREM
2		HYPERBOLE			2000	NATHAN
2		TRANSMATH			2000	NATHAN
2		PHYSIQUE	PHYSIQUE	DURRANDEAU	2000	HACHETTE
1	ES	FRACTALE	OBLIG		1998	BORDAS
1	ES	FRACTALE	OPT		1998	BORDAS
1	ES	MATHEMATIQUES			2001	BREAL
1	ES	DIMATHEME	OBLIG		2001	DIDIER
1	ES	DIMATHEME	OPT		2001	DIDIER
1	ES	DECLIC			2001	HACHETTE
1	ES	TRANSMATH			1998	NATHAN
1	ES	TRANSMATH			2001	NATHAN
1	ES	HYPERBOLE			2001	NATHAN
1	L	INDICE			2001	BORDAS
1	L	MATH INFO			2001	DELAGRAV E
1	L	MANUEL DE MATHEMATIQUES			2002	ELLIPSES
1	L	FICHES TD TP			2002	ELLIPSES
1	L	MATH INFO			2003	HACHETTE
1	L	DECLIC			1999	HACHETTE
1	L	DECLIC			2001	HACHETTE
1	L	MATH INFO			2001	HATIER
1	L	TRANSMATH			2001	NATHAN
1	S	MATHEMATIQUES			2001	BELIN
1	S	INDICE			2001	BORDAS
1	S	FRACTALE			2001	BORDAS
1	S	MATHEMATIQUES			2001	BREAL
1	S	DIMATHEME	GEOMETRIE		2001	DIDIER
1	S	DIMATHEME	ANALYSE		2001	DIDIER
1	S	GEOMETRIE		TERRACHER	2001	HACHETTE
1	S	DECLIC			2001	HACHETTE
1	S	ANALYSE		TERRACHER	2001	HACHETTE
1	S	TRANSMATH			2001	NATHAN
1	S	HYPERBOLE			2001	NATHAN
1	SMS	DIMATHEME			1998	DIDIER
1	STI	DIMATHEME			1998	DIDIER
1	STT	INDICE			2003	BORDAS
1	STT	SIGMATH			2001	FOUCHER
1	STT	MATHEMATIQUES			2002	HACHETTE
T	ES	FRACTALE	SP		1998	BORDAS
T	ES	FRACTALE	OBL		1998	BORDAS
T	ES	MATHEMATIQUES			2002	BREAL
T	ES	MATHEMATIQUES			1998	BREAL
T	ES	DIMATHEME	SP		1998	DIDIER
T	ES	DIMATHEME	OBL		1998	DIDIER
T	ES	DECLIC			1998	HACHETTE
T	ES	DECLIC			2002	HACHETTE
T	ES	LE GUIDE ABC BAC			2002	NATHAN
T	ES	TRANSMATH			2002	NATHAN
T	ES	HYPERBOLE			2002	NATHAN
T	L	DECLIC			1999	HACHETTE
T	S	MATHEMATIQUES			1998	BELIN
T	S	FRACTALE	OBL		1998	BORDAS
T	S	FRACTALE	SP		1998	BORDAS
T	S	FRACTALE	SP		2002	BORDAS
T	S	FRACTALE	OBL		2002	BORDAS
T	S	INDICE	SP		2002	BORDAS
T	S	INDICE	OBL		2002	BORDAS
T	S	MATHEMATIQUES	SP		2002	BREAL
T	S	MATHEMATIQUES	OBL		2002	BREAL
T	S	MATHEMATIQUES	SP		1998	BREAL
T	S	MATHEMATIQUES	OBL		1998	BREAL
T	S	DIMATHEME	SP		1998	DIDIER

T	S	DIMATHEME	OBL		1998	DIDIER
T	S	BAC AVEC MENTION			1998	ELLIPSES
T	S	EXERCICES			1999	ELLIPSES
T	S	FOR MATH			1999	ELLIPSES
T	S	MATHEMATIQUES	SP	TERRACHER	1998	HACHETTE
T	S	MATHEMATIQUES	OBL	TERRACHER	1998	HACHETTE
T	S	DECLIC	SP		1998	HACHETTE
T	S	DECLIC	OBL		1998	HACHETTE
T	S	CORRIGES		TERRACHER	1998	HACHETTE
T	S	CORRIGES		TERRACHER	1996	HACHETTE
T	S	MATHEMATIQUES		TERRACHER	2002	HACHETTE
T	S	DECLIC			2002	HACHETTE
T	S	TRANSMATH	OBL		2002	NATHAN
T	S	TRANSMATH	SP		1998	NATHAN
T	S	TRANSMATH	OBL		1998	NATHAN
T	S	HYPERBOLE	OBL		2002	NATHAN
T	S	HYPERBOLE	SP		2002	NATHAN
T	STI	DIMATHEME			1997	DIDIER
T	STI	MATHEMATIQUES			1998	HACHETTE
T	STI	MATHEMATIQUES			1998	NATHAN
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1999	DIDIER
T	STT	DIMATHEME			1999	DIDIER
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1997	FOUCHER
T	STT	MATHS ACA ET ACC			1997	FOUCHER
T	STT	MATHS ACA ET ACC			2002	HACHETTE
T	STT	MATHS ACA ET ACC			1998	HACHETTE
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1998	HACHETTE
T	STT	COMPTABILITE GESTION			2002	HACHETTE
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1998	NATHAN
T	STT	MATHS ACA ET ACC			1998	NATHAN
T		ENSEIGNER LES PROBAS			1994	IREM
BEP	INDUSTRIEL	MATHEMATIQUES 2		BARUSSAUD,FAVRE ARTIGUES,THEVENON	1994	FOUCHER
BEP	INDUSTRIEL	MATHEMATIQUES	INDUSTRIEL,SANITAIRE ET SOCIAL	ASTIER,VRIGNAUD	2002	NATHAN
BEP	TERTIAIRE	LES CAHIERS DE MATHEMATIQUES		BARUSSAUD,NOËL	2001	FOUCHER
BEP	TERTIAIRE	MATHEMATIQUES	TERTIAIRE,HÔTELLERIE,RESTAURATION	ASTIER,VRIGNAUD	2002	NATHAN
BTS	INDUSTRIEL	ANALYSE,ALGEBRE LINEAIRE,NOMBRES COMPLEXES	BATIMENT & LABO	VERLANT	1997	FOUCHER
BTS	INDUSTRIEL					FOUCHER
BTS	TERTIAIRE	ANALYSE ET ALGEBRE LINEAIRE TOME1	INFORMATIQUE ET GESTION	VERLANT	1997	FOUCHER
BTS	TERTIAIRE					HACHETTE
BTS		PROBAS ET STATS,STATS INFERENTIELLES			1996	IREM
BTS/IUT		PROBAS ET STATS		GACÔGNE,FRUGIER	1990	EYROLLES

Annales

BAC	ES	ANNALES	CORRIGE		1998	HATIER
BAC	ES	ANNALES	SUJETS		1998	HATIER
BAC	ES	ANNALES	SUJETS		1995	VUIBERT
BAC	ES L	ANNALES	SUJETS		1997	NATHAN
BAC	ES L	ANNALES	CORRIGE		1997	NATHAN
BAC	ES L	ANNALES	CORRIGE		1998	VUIBERT
BAC	ES L	ANNALES	SUJETS		1998	VUIBERT
BAC	L	ANNALES	CORRIGE		1998	HATIER
BAC	L	ANNALES	SUJETS		1998	HATIER
BAC	L	ANNALES	SUJETS		2000	HATIER
BAC	L	ANNALES	SUJETS		2001	HATIER
BAC	L	ANNALES	SUJETS		1996	VUIBERT
BAC	S	ANNALES	CORRIGE		1998	HATIER
BAC	S	ANNALES	CORRIGE		1998	HATIER
BAC	S	ANNALES	SUJETS		1998	HATIER
BAC	S	ANNALES	SUJETS		1997	NATHAN
BAC	S	ANNALES	CORRIGE		1998	NATHAN
BAC	S	ANNALES	CORRIGE		1998	VUIBERT
BAC	S	ANNALES	SUJETS		1998	VUIBERT
BAC	S	ANNALES	SUJETS		1996	VUIBERT
BAC	S	ANNALES	SUJETS		1995	VUIBERT
BAC	STT STI	ANNALES	SUJETS		1995	NATHAN
BAC	STT STI	ANNALES	CORRIGE		1996	NATHAN
BAC	STT STI	ANNALES	CORRIGE		1998	NATHAN
BAC	STT STI	ANNALES	SUJETS		1998	NATHAN
BREVET		ANNALES	CORRIGE		1998	HATIER
BREVET		ANNALES	CORRIGE		1997	NATHAN
BREVET		ANNALES	SUJETS		1997	NATHAN
BREVET		ANNALES	SUJETS		1998	NATHAN
BREVET		ANNALES	CORRIGE		1994	VUIBERT
BREVET		ANNALES	SUJETS		1994	VUIBERT
BREVET		ANNALES	SUJETS		1995	VUIBERT
BREVET		ANNALES	SUJETS		1996	VUIBERT
BREVET		ANNALES	SUJETS		1998	VUIBERT

Le jury remercie tous les éditeurs qui ont contribué à l'actualisation de la bibliothèque en facilitant l'acquisition de leurs ouvrages récents.
Il tient à mentionner tout particulièrement les maisons d'édition suivantes, qui ont fait preuve d'une grande générosité, et ont fourni gracieusement un nombre important de manuels parus en 2003 à l'occasion de la mise en œuvre des nouveaux programmes de terminale.

BREAL – DIDIER – DUNOD – MASSON – VUIBERT

5.2. Calculatrices

Depuis la session 1994, les calculatrices personnelles sont interdites pour les deux épreuves orales (cf. B.O. n°13 du 15-04-93). Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du CAPES.

Pour la session 2004 les constructeurs ont permis par des prêts gracieux de proposer une quantité suffisante de modèles récents de calculatrices rétroprojetables:

CASIO	ensemble de rétroprojection RM 7000		
HEWLETT-PACKARD	40G ;	48GX	
TEXAS INSTRUMENTS	TI 89 ;	TI 92	TI Voyage 200

Pour la session 2005, qui verra la mise en place d'une nouvelle forme de la seconde épreuve orale (épreuve sur dossier), le prêt de calculatrices sera simplifié. Deux modèles seulement seront présentés :

Texas Instruments Voyage 200 *et* ***Casio Class Pad 300***

Ces modèles ont été choisis car ils comportent des logiciels de géométrie et des tableurs, permettant ainsi la cohérence avec les exigences actuelles des programmes des collèges et des lycées. Il est indispensable que les futurs candidats connaissent l'une ou l'autre de ces deux machines.

Le jury remercie les constructeurs ainsi que le S.I.E.C. pour les prêts ou les dons qu'ils ont effectués.