MINISTÈRE DE LA JEUNESSE, DE L'ÉDUCATION ET DE LA RECHERCHE

Direction des personnels enseignants

CAPES EXTERNE & CAFEP-CAPES DE MATHÉMATIQUES

Rapport de Monsieur Jean MOUSSA
Inspecteur Général de l'Éducation Nationale
Président du Jury

2006
CENTRE NATIONAL DE DOCUMENTATION PEDAGOGIQUE

CONSEILS PRATIQUES AUX FUTURS CANDIDATS

Il est recommandé aux futurs candidats de s'informer à l'avance sur les modalités des concours de recrutement en général et sur celles particulières au CAPES externe et au CAFEP-CAPES de mathématiques.

Les renseignements généraux (les conditions d'accès ; la préparation ; le déroulement du concours ; la carrière dans l'enseignement secondaire) se trouvent réunis dans la brochure de l'O.N.I.S.E.P concernant les informations relatifs aux métiers de l'enseignement.

Collection parcours
Référence: 97822730000796
Niveau: Lycéens/Etudiants.

ainsi que sur le site du Ministère www.education.gouv.fr , rubrique SIAC.

Les informations spécifiques (programmes ; nature des épreuves) sont publiées dans le bulletin officiel de l'éducation nationale, publication qui informe les enseignants : carrière, programmes, nominations, vacances de postes, concours, etc. Ces renseignements se trouvent également, pour l'essentiel, dans le rapport du concours.

Le jury, pour faciliter la recherche d'information émanant des candidats et des formateurs, a en outre créé un site à l'adresse :

www.capes.math.jussieu.fr

sur lequel il a réuni l'essentiel des informations utiles à la préparation au concours. Les informations figurant sur ce site n'ont pas de caractère officiel ; seules les informations délivrées directement par la DPE et par le Ministère ont valeur officielle.

« LES RAPPORTS DES JURYS DES CONCOURS SONT ETABLIS SOUS LA RESPONSABILITE DES PRESIDENTS DE JURY »

SOMMAIRE

I. PRESENTATION DU CONCOURS 2006 page 5

1. Composition du jury page 5
2. Programme du concours page 11
3. Statistiques page 27
   3.1 Evolution et résultats globaux page 27
   3.2 Résultats par catégories page 28
   3.3 Résultats par académie page 30
   3.4 Répartition des notes page 32
4. Les épreuves écrites page 36
5. Les épreuves orales page 36
   5.1 Organisation page 36
   5.2 Conseils pratiques page 37
   5.3 L'évaluation des épreuves orales page 38
   5.4 Première épreuve : exposé sur un thème donné page 39
   5.5 Deuxième épreuve : épreuve sur dossier page 40
   5.6 Commentaires sur l'utilisation des calculatrices page 41

II. ENONCES ET ANALYSE DES EPREUVES ECRITES page 43

1. Enoncé de la 1° épreuve page 43
2. Analyse de la 1° épreuve page 50
3. Enoncé de la 2° épreuve page 53
4. Analyse de la 2° épreuve page 61

III. SUJETS ET ANALYSE DES EPREUVES ORALES page 64

1. Liste des exposés (première épreuve orale) page 64
2. Sujets de l'épreuve sur dossier (seconde épreuve orale) page 69
3. Analyse des épreuves orales page 70
   3.1 Commentaires sur la première épreuve page 70
   3.2 Commentaires sur la seconde épreuve page 74
   3.3 Les dossiers de la 2°épreuve orale page 76

IV. CONCLUSION page 107

V. ANNEXES page 108

1. Bibliothèque du CAPES page 108
   1.1. Programmes page 108
   1.2. Ouvrages disponibles (seulement pour l'épreuve sur dossier) page 108

2. Calculatrices page 117

CONCOURS de 3ème VOIE MATHEMATIQUES Session 2006 page 118

I. PRESENTATION DU CONCOURS 2006

Composition du jury.

Par arrêté en date du 25 janvier 2006, la composition du jury est la suivante:

Civilité	nom	prénom	fonction	académie
M.	MOUSSA	Jean	IGEN Président	
Mme.	AEBISCHER	Anne-Marie	Professeur Agrégée Vice-présidente	Besançon
M.	CANET	Jean François	IA-IPR Vice-président	Montpellier
M.	CORI	René	Maître de Conférences Secrétaire général	Paris
Mme	FLEURY-BARKA	Odile	Maître de Conférences Vice-présidente	Reims
M.	FORT	Marc	IGEN Vice-président	
M.	SORBE	Xavier	IGEN Vice-président	
Mme	ABABOU	Rachel	Maître de conférences	Ministère de la défense
M.	ACX	Olivier	Professeur de Chaire Supérieure	Paris
M.	AEBISCHER	Bruno	Professeur Agrégé	Besançon
M.	AGUER	Bernard	IA-IPR	Amiens
M.	ALESSANDRONI	Philippe	IA-IPR	Nancy-Metz
Mme	AMIOT	Martine	IA-IPR	Créteil
Mme	ANANOU	Chantal	Professeur Agrégée	Paris
Mme	ANDRE	Stéphanie	Professeur Agrégé	Versailles
M.	ANDRIEUX	Jean-Claude	Professeur Agrégé	Dijon
M.	ARTIGUES	Christian	IA-IPR	Bordeaux
M.	AUBRY	Pierre-Jean	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	AUDOUIN	Marie-Claude	IA-IPR	Versailles
M.	BADRA	Abdallah	Maître de conférences	Clermont Ferrand
M.	BAJI	Bruno	Professeur Agrégé	Limoges

Mme	BANTEGNIES	Florence	Professeur de chaire supérieure	Paris
M.	BARBE	Jacques	Professeur Agrégé	Nantes
M.	BECHATA	Abdellah	Professeur Agrégé	Reims
Mme	BERTRAND-MATHIS	Anne	Professeur des Universités	Poitiers
Mme	BIGEARD	Isabelle	Professeur Agrégé	Grenoble
Mme	BLANCHET	Anne	Professeur Agrégée	Grenoble
Mme	BLAU	Danielle	IA-IPR	Toulouse
M.	BLOUZA	Adel	Maître de Conférences	Rouen
M.	BODY	Bernard	Professeur Agrégé	Grenoble
Mme	BOISSONNET	Emilia	Professeur Agrégée	Paris
Mme	BONVALOT	Françoise	Professeur Agrégée	Caen
M.	BOULMEZAOUD	Tahar Zamène	Maître de conférences	Versailles
M.	BOURGES	William	Professeur Agrégé	Aix-Marseille
M.	BOUSCASSE	Jean-Marie	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	BRAMOULLE	Laurence	Professeur Agrégée	Poitiers
M.	BRANDEBOURG	Patrick	Professeur Agrégé	Montpellier
Mme	BRISSET	Anne Marie	Professeur Agrégée	Paris
M.	BRUCKER	Christian	Professeur Agrégé	Strasbourg
Mme	BRUYANT	Francine	Maître de Conférences	Reims
M.	BURG	Pierre	Professeur Agrégé	Strasbourg
M.	CANON	Eric	Maître de Conférences	Besançon
M.	CARRON	Christophe	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	CHOQUER RAOULT	Agnès	Professeur Agrégée	Versailles
Mme	CLAVEL	Sylvaine	Professeur Agrégée	Versailles
M.	COMPOINT	Elie	Maître de conférences	Paris
Mme	COURBON	Denise	IA-IPR	Lyon
Mme	COURCON	Nicole	Professeur Agrégée	Nantes
M.	COURILLEAU	Patrick	Maître de conférences	Versailles

Mme	DARRACQ	Marie Cécile	Professeur Agrégé	Grenoble
Mme	DEAT	Joelle	IA-IPR	Créteil
M.	DESCHAMPS	Bruno	Professeur des Universités	Nantes
M.	DIAGNE	Malick	Professeur Agrégé	Orléans-Tours
M.	DOGBE	Christian	Maître de conférences	Caen
M.	DULON	Laurent	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	DUPONCHEL	Domitille	IA-IPR	Lille
Mme	ERNOULT	Monique	Professeur Agrégée	Créteil
M.	ESCOFFIER	Jérôme	Professeur Agrégé	Grenoble
Mme	EVRARD	Sabine	Professeur Agrégé	Amiens
M.	FAURE	Christian	Professeur Agrégé	Montpellier
M.	FERRARD	Jean Michel	Professeur de Chaire Supérieure	Lyon
M.	GEOFFRIAU	François	Maître de Conférences	Poitiers
Mme	GEST	Monique	Professeur Agrégée	Lille
M.	GIRAULT	Dominique	Professeur Agrégé	Poitiers
M.	GROISON	Jean Marc	Professeur Agrégé	Lyon
Mme	HAEGEL	Suzy	Professeur Agrégée	Strasbourg
M.	HANS	Jean-Luc	Professeur de Chaire Supérieure	Besançon
M.	HARINGTON	Bruno	Professeur agrégé	Montpellier
M.	HEROULT	François	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	HOUARD	Catherine	Professeur Agrégée	Versailles
Mme	HUG	Patricia	Professeur Agrégé	Versailles
M.	JAMET	Pierre Yves	Professeur Agrégé	Rennes
M.	JANIN	Robert	Professeur des Universités	Guadeloupe
Mme	JAUFFRET	Brigitte	IA-IPR	Aix-Marseille
M.	JEDDI	Ahmed	Maître de conférences	Nancy-Metz
Mme	KERVADEC	Elisabeth	Professeur Agrégée	Rennes
M.	KHELIF	Anatole	Maître de conférences	Paris

M.	LAAMRI	El Haj	Maître de conférences	Nancy-Metz
M.	LABROSSE	Jean	Professeur Agrégé	Lyon
Mme	LAGUILLIER	Marie Thérèse	Professeur Agrégée	Créteil
Mme	LAMPLE	Hélène	Professeur Agrégée	Lyon
Mme	LANERY	Hélène	Professeur Agrégé	Amiens
Mme	LAPOLE	Isabelle	Professeur Agrégée	Amiens
M.	LAPOLE	René	Professeur Agrégé	Amiens
M.	LASSALLE	Olivier	IA-IPR	Lille
M.	LE BARS	Michel	Professeur Agrégé	Paris
Mme	LECUREUX - TETU	Marie Hélène	Professeur Agrégé	Toulouse
M.	LEFEUVRE	Yann	Professeur Agrégé	Amiens
M.	LEGROS	Stéphane	Professeur de chaire supérieure	Rouen
M.	LEHMAN	Eric	Professeur des Universités	Caen
M.	LEMPEREUR DE GUERNY	Robert	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	LEROY	Aurélie	Professeur Agrégé	Versailles
M.	LETERRIER	Pierre	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	LETHIELLEUX	Claire	Professeur Agrégée	Paris
Mme	LEWILLION	Martine	IA-IPR	Montpellier
M.	LUCAS	Edouard	Professeur Agrégé	Paris
M.	MALKI	Saber	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
M.	MAUGER	David	Maître de Conférences	Paris
Mme	MEDARD	Natacha	Professeur Agrégé	Grenoble
M.	MENEVIS	Hervé	Professeur Agrégé	Paris
Mme	MENINI	Chantal	Maître de Conférences	Bordeaux
M.	MERCKHOFFER	René	IA-IPR	Versailles
Mme	MERDY	Claudine	Professeur Agrégée	Créteil
Mme	MEURISSE	Anne	Professeur Agrégée	Lille
M.	MICHALAK	Pierre	IA-IPR	Versailles

Mme	MILIN	Sylvie	Professeur Agrégée	Versailles
Mme	MOURGUES	Marie-Hélène	Maître de Conférences	Créteil
M.	MOURRET	Bernard	Professeur Agrégé	Montpellier
Mme	NAUD	Claire	Professeur Agrégée	Versailles
Mme	NOGUES	Maryse	Professeur Agrégée	Montpellier
Mme	NOUVET	Michèle	Professeur Agrégée	Caen
M.	OUDET	Edouard	Maître de Conférences	Grenoble
M.	PAINTANDRE	Stéphan	Professeur Agrégé	Toulouse
Mme	PANOFF	Brigitte	Professeur Agrégé	Paris
Mme	PAOLANTONI	Victoria	Professeur Agrégée	Grenoble
M.	PARISE	Laurent	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
Mme	PASSAT	Isabelle	Professeur Agrégée	Versailles
M.	PETIT	Francis	Professeur Agrégé	Grenoble
M.	PIRIOU	Laurent	Maître de Conférences	Nantes
Mme	PLANCHE	Nathalie	Professeur Agrégée	Clermont Ferrand
M.	PUYOU	Jacques	Professeur Agrégé	Bordeaux
M.	QUAREZ	Ronan	Maître de conférences	Rennes
M.	QUIBLIER	Philippe	Professeur de Chaire Supérieure	Grenoble
M.	RANDRIAMIHAMISON	Louis	Maître de Conférences	Toulouse
M.	REVRET	Richard	Professeur Agrégé	Lille
M.	REZZOUK	Marc	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
M.	ROBLET	Emmanuel	Professeur Agrégé	Paris
Mme	ROUDNEFF	Evelyne	IA-IPR	Versailles
M.	RUPPRECHT	David	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
M.	SAAI	Mustapha	Professeur Agrégé	Nancy-Metz
Mme	SANZ	Monique	IA-IPR	Nantes
M.	SCATTON	Philippe	IA-IPR	Reims
M.	SERRA	Eric	IA-IPR	Nice

Mme	SIMONDON	Frédérique	Professeur des Universités	Nancy-Metz
M.	TENTI	Marc	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	TERREAU	Corinne	Professeur Agrégé	Dijon
M.	THYS	Henrik	Professeur Agrégé	Amiens
M.	TOUPANCE	Pierre-Alain	Professeur Agrégé	Lyon
Mme	TRAD	Marie-Anne	Professeur de Chaire Supérieure	Paris
M.	TRUCHAN	Alain	Professeur Agrégé	Lyon
M.	VEERAVALLI	Alain	Maître de Conférences	Créteil
M.	VIAL	Jean-Pierre	Professeur de Chaire Supérieure	Paris
M.	VINAVER	Georges	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	WERQUIN	Claude	Professeur Agrégée	Versailles
M.	WERQUIN	Philippe	Professeur Agrégé	Versailles
M.	YAHIA-BERROUIGUET	Mohamed	Professeur Agrégé	Aix-Marseille

2. Programme du concours

Le texte en vigueur est celui paru au B.O. n°8 spécial du 24 mai 2001, modifié par le B.O. n°5 spécial du 20 mai 2004. Le texte ci-dessous tient compte des modifications.

ÉPREUVES ECRITES

Le programme est formé des titres A et B de l'annexe I

ÉPREUVES ORALES

Épreuve d'exposé
Le programme est formé du titre A augmenté des paragraphes suivants du titre B de l'annexe I :

1.II. « Ensembles, relations, applications. ».
2.I.3. « Structures des ensembles de nombres. ».
2.III.5. « Calcul matriciel », alinéa b).
2.IV.2. « Géométrie vectorielle », alinéa e).
2.V.2. « Configurations ».
2.V.3. « Transformations ».
2.V.4. « Emploi des nombres complexes en géométrie », alinéas a), c) et d).
3.I.1. « Suites de nombres réels et de nombres complexes », alinéas a), b), d) et e).
3.I.2. « Fonctions d'une variable réelle ».
3.II.2. « Dérivation », dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
3.II.3. « Intégration sur un intervalle compact », dans ce même cas.
3.II.4. « Étude locale de fonctions ».
3.IV.2. « Équations linéaires scalaires », alinéa b).
3.VI.1. « Courbes et surfaces », alinéa a).
4.2. « Variables aléatoires », alinéas a) et c).

Épreuve sur dossier
Le programme est formé du titre A de l'annexe I.

UTILISATION DES CALCULATRICES
Circulaire du 16 Novembre 1999 n° 99-186 parue au BOEN n° 42 du 25 Novembre 1999.

ANNEXE I

A. Programmes de l'enseignement secondaire

1. La réunion des programmes de mathématiques des collèges et des lycées d'enseignement général et technologique en vigueur au 1er janvier de l'année du concours et de ceux en vigueur au 1er janvier de l'année précédente.
2. L'utilisation des calculatrices électroniques est défini par les arrêtés du 15 Mai 1997 complétés par la circulaire n° 99-018 du 1.2.1999 parue au BOEN n°6 du 11-02-1999 ainsi que la circulaire du 16-11-1999.

Dans ce cadre, les candidats doivent se munir d'une *calculatrice scientifique programmable,* alphanumérique ou non, et graphique. Ils doivent savoir utiliser leur calculatrice dans les situations numériques et algorithmiques liées au programme. Cet emploi combine les capacités suivantes, qui constituent un savoir-faire de base et sont seules exigibles :

- Savoir programmer une instruction d'affectation.

- Savoir effectuer les opérations arithmétiques sur les nombres et savoir comparer des nombres.

- Savoir utiliser les touches des fonctions qui figurent au programme et savoir programmer le calcul des valeurs d'une fonction d'une ou plusieurs variables permis par ces touches.

- Savoir programmer une instruction séquentielle, alternative ou itérative.

- Savoir afficher à l'écran la courbe représentative d'une fonction.

Ils doivent en outre munir leur calculatrice de programmes permettant :

- la recherche de solutions approchées d'une équation numérique à une variable,
- le calcul de valeurs approchées d'une intégrale.

B. Programme complémentaire

Comme il est indiqué dans les instructions, les problèmes et les méthodes numériques et les aspects algorithmiques et informatiques (construction et mise en forme d'algorithmes, comparaison de leur performance, rédaction méthodique de programmes) sont largement exploités. Dans le texte du programme, ils sont représentés par le signe §.

1. NOTIONS SUR LA LOGIQUE ET LES ENSEMBLES

Aucun exposé de logique formelle n'est envisagé.

I. Généralités sur le langage et le raisonnement mathématiques. Éléments de logique.

Occurrences libres (ou parlantes) et occurrences liées (ou muettes) d'une variable dans une expression mathématique ; signes mutificateurs usuels ($\int$ …… d… , $\sum$, $\mapsto$, { … | …… } ; $\forall$; $\exists$; etc.) ; mutifications implicites.

Calcul propositionnel : connecteurs logiques ; tables de vérité ; tautologies.

Utilisation des connecteurs et des quantificateurs dans le discours mathématique ; lien entre connecteurs logiques et opérations ou relations ensemblistes.

Pratique du raisonnement mathématique : hypothèses, conclusions, quelques figures usuelles du raisonnement (raisonnement par contraposition, par disjonction de cas, par l'absurde, utilisation d'exemples ou de contre-exemples, etc.) ; pour les énoncés sous forme d'implication, distinction entre condition nécessaire et condition suffisante, entre proposition directe et proposition réciproque ; cas particuliers de la recherche de lieux géométriques, d'ensembles de solutions d'équations.

II. Ensembles, relations, applications.

Opérations ensemblistes usuelles ; produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.
Relations et applications ; lois de composition internes ou externes.

Ensemble des parties d'un ensemble ; image directe ou image réciproque d'une partie par une application ; comportement des opérations d'image directe et d'image réciproque vis-à-vis des opérations ensemblistes.

Familles d'ensembles ; réunions et intersections « infinies ».

Relations d'ordre ; majorants, borne supérieure…
Ensemble IN des nombres entiers naturels. Toute partie non vide de IN admet un plus petit élément. Raisonnement par récurrence.

Relations d'équivalence ; classes d'équivalence, partition associée, ensemble quotient, compatibilité d'une loi de composition avec une relation d'équivalence (passage au quotient).

Construction de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$.

III. Rudiments de cardinalité.

Équipotence de deux ensembles ; classe des ensembles équipotents à un ensemble donné ; notion de cardinal.

Théorème de Cantor (« aucun ensemble n'est équipotent à l'ensemble de ses parties »).

Fonction caractéristique d'une partie d'un ensemble ; équipotence entre l'ensemble des parties d'un ensemble E et l'ensemble des applications de E dans {0,1}.

Ensembles finis et infinis.

Ensembles dénombrables : exemples usuels ($\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, l'ensemble des suites finies d'entiers, l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ des polynômes à coefficients rationnels, l'ensemble des nombres algébriques, etc.).

Puissance du continu (cardinal de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ou de $\mathbb{R}$) ; non dénombrabilité de $\mathbb{R}$.

2. ALGEBRE ET GEOMETRIE

I. Nombres et structures

1. Groupes

a) Groupes, morphismes de groupes. Sous-groupes, sous-groupe engendré par une partie. Groupes cycliques. Ordre d'un élément ; théorème de Lagrange. Image et noyau d'un morphisme de groupes. Sous-groupes distingués, groupe quotient. Groupe opérant sur un ensemble, orbites. Éléments conjugués.

§ b) Permutations d'un ensemble fini, groupe symétrique. Cycles ; transpositions. Décomposition d'une permutation en produit de cycles disjoints, en produit de transpositions. Signature d'une permutation, groupe alterné.

2. Anneaux et corps

Anneaux (unitaires), morphismes d'anneaux. Sous-anneaux.

Anneaux commutatifs, anneaux intègres ; idéaux, idéaux principaux ; anneaux quotients. Corps (commutatifs), sous-corps ; caractéristique d'un corps.

3. Structure des ensembles de nombres

a) Anneau $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs (ou rationnels). L'anneau $\mathbb{Z}$ est intègre ; divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne ; sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$

Les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont principaux ; théorème de Bezout.

§ b) Nombres premiers ; décomposition en facteurs premiers.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

c) Congruences ; anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, caractérisation des éléments inversibles.

d) Corps des rationnels, corps des réels, corps des complexes.

II. Polynômes et fractions rationnelles

Dans ce chapitre, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$

1. Polynômes à une indéterminée

§ a) Algèbre $K[X]$; degré d'un polynôme, terme dominant, polynôme unitaire.

L'anneau $K[X]$ est intègre ; divisibilité dans $K[X]$. Division euclidienne.

Les idéaux de $K[X]$ sont principaux ; théorème de Bezout.

Polynômes irréductibles ; décomposition en facteurs Irréductibles.

PGCD, PPCM ; algorithme d'Euclide.

b) Fonctions polynômes

Racines (ou zéros) d'un polynôme, ordre de multiplicité. Polynômes scindés.

Correspondance entre polynômes et fonctions polynômes.

Équations algébriques. Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

c) Dérivation des polynômes ; formule de Taylor.

d) Théorème de D'Alembert ; polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
Factorisation des polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Fractions rationnelles à une indéterminée

a) Corps $K(X)$; forme irréductible d'une fraction rationnelle non nulle.

b) Fonctions rationnelles : pôles, zéros ; ordre d'un pôle ou d'un zéro.

c) Décomposition en éléments simples. Cas du corps $\mathbb{C}$ et du corps $\mathbb{R}$.

d) Exemples simples de problèmes d'élimination.

III. Algèbre linéaire

Dans cette partie, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$

1. Espaces vectoriels

a) Espaces vectoriels. Applications linéaires, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes. Formes linéaires. Espace vectoriel $L(E,F)$, algèbre $L(E)$, groupe linéaire $GL(E)$. Espace vectoriel produit d'une famille finie d'espaces vectoriels.

b) Sous-espaces vectoriels ; image et noyau d'une application linéaire. Sous-espace engendré par une partie. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels , somme directe. Sous-espaces vectoriels supplémentaires, projecteurs.

c) Familles libres, familles génératrices, bases.

d) Étant donné une application linéaire u de E dans F et un supplémentaire E' de $\ker u$ dans E, u définit un isomorphisme de E' sur $\mathrm{Im}\, u$.

2. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Espaces admettant une famille génératrice finie. Théorème de la base incomplète, existence de bases ; dimension. Dimension d'un sous-espace, rang d'une famille de vecteurs. Existence de supplémentaires. Dimension d'une somme directe.

b) Rang d'une application linéaire ; formule du rang,
caractérisation des isomorphismes.

c) Formes linéaires et hyperplans, équation d'un hyperplan.

d) Dualité. Bases associées d'un espace E et de son dual E*. Orthogonal dans E* d'une partie de E, orthogonal dans E d'une partie de E* : dimension de l'orthogonal, double orthogonal.

3. *Matrices*

a) Espace vectoriel $M_{p,q}(K)$ des matrices à p lignes et q colonnes. Isomorphisme entre $L(K^q,K^p)$ et $M_{p,q}(K)$. Produit matriciel, transposition. Algèbre $M_n(K)$; matrices inversibles, groupe linéaire $GL_n(K)$. Matrices symétriques, antisymétriques.

b) Matrice d'une application linéaire d'un espace vectoriel dans un autre, ces espaces étant munis de bases ; matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel muni d'une base, matrice d'une famille finie de vecteurs relativement à une base. Matrice de passage (la matrice de passage de la base B à la base C est la matrice dont la j-ième colonne est formée des coordonnées dans B du j-ième vecteur de C). Effet d'un changement de base(s) sur la matrice d'une application linéaire.

c) Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme.

d) Rang d'une matrice. Utilisation de matrices carrées extraites pour la détermination du rang. Matrices équivalentes. Caractérisation à l'aide du rang. Toute matrice M de rang r est équivalente à la matrice $I_r = (\alpha_{ij})$, définie par les relations $\alpha_{jj} = 1$ si $1 \leq j \leq r$, et $\alpha_{ij} = 0$ dans tous les autres cas. Rang de la transposée d'une matrice.

e) Systèmes d'équations linéaires, rang. Conditions de compatibilité, systèmes de Cramer.

4. Applications multilinéaires, déterminants

a) Définition des applications multilinéaires, des applications symétriques, antisymétriques, alternées.

b) Formes n-linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n. Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n, critère d'indépendance.

c) Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

d) Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Mineurs, cofacteurs, développement par rapport à une ligne ou une colonne.

e) Applications des déterminants, expression de l'inverse d'une matrice carrée inversible, formules de Cramer ; orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

f) En relation avec la géométrie, application des déterminants à l'étude des systèmes linéaires de deux ou trois équations à deux ou trois inconnues.

5. Calcul matriciel

§ a) Exemples de calculs par blocs. Exemples d'emploi de normes matricielles. Conditionnement d'une matrice.

§ b) Opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice ; addition d'un multiple d'une ligne à une autre, multiplication d'une ligne par un scalaire non nul, échange de deux lignes. Applications à la résolution des systèmes linéaires, au calcul de déterminants, à l'inversion des matrices carrées et au calcul du rang.

Algorithme du pivot de Gauss ; pivot partiel, pivot total.

6. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Dans ce paragraphe, le corps de base est $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

a) Sous-espaces stables par un endomorphisme. Si u et v commutent, $\operatorname{Im} u$ et $\ker u$ sont stables par v. Polynômes d'un endomorphisme ; théorème de décomposition des noyaux : si P et Q sont premiers entre eux,

$$\ker PQ(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

b) Valeurs propres d'un endomorphisme, sous-espaces propres, vecteurs propres.

c) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

Polynôme annulant un endomorphisme ; lien avec le spectre.

Polynôme caractéristique, ordre de multiplicité d'une valeur propre. Théorème de Cayley-Hamilton.

Endomorphismes diagonalisables ; l'espace est somme directe des sous-espaces propres. Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable. Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

Sous-espaces caractéristiques. Tout endomorphisme u dont le polynôme caractéristique est scindé peut être trigonalisé : l'espace est somme directe des sous-espaces caractéristiques F_j et il existe une base de chaque F_j telle que la matrice dans cette base de l'endomorphisme induit par u soit triangulaire supérieure ; en outre, la dimension de F_j est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_j. Un tel endomorphisme u s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $u = d + n$, où d est diagonalisable, n est nilpotent, et $nd = dn$.

§ d) Valeurs propres d'une matrice carrée, vecteurs (colonnes) propres. Matrices semblables. Diagonalisation, trigonalisation des matrices carrées. Exemples d'emploi de décomposition en blocs (produits, matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs).

IV. Espaces euclidiens, espaces hermitiens

(cf. analyse 3.I.6 espaces préhilbertiens réels ou complexes.)

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.

1. Espaces euclidiens

a) Isomorphisme canonique avec le dual.

Sommes directes orthogonales. Dimension de l'orthogonal d'un sous-espace, normale à un hyperplan. Projecteurs et symétries orthogonales.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes symétriques, antisymétriques.

c) Automorphismes orthogonaux. Groupe orthogonal O(E), groupe des rotations (ou spécial orthogonal) SO(E). Matrices orthogonales. Groupes O(n) et SO(n). Matrice associée à un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale.

Changements de base orthonormale.

d) Déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.

2. Géométrie vectorielle euclidienne

a) Les réflexions engendrent le groupe orthogonal O(E).

b) Dans le plan euclidien orienté (n = 2) : matrice d'une rotation ; angle d'une rotation. Morphisme canonique de $\mathbb{R}$ sur SO(2).

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

c) Dans l'espace euclidien orienté (n = 3) :

Axe et angle d'une rotation. Les demi-tours engendrent SO(3).

Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.

d) En dimension 2 ou 3 : groupe des similitudes ; similitudes directes.
Rapport d'une similitude, automorphisme orthogonal associé.

e) Produit vectoriel en dimension 3 ; expression dans une base orlhonormale directe.

3. Espaces hermitiens

a) Sommes directes orthogonales. Projecteurs orthogonaux.

b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.

Endomorphismes hermitiens, matrices hermitiennes.

c) Automorphismes unitaires. Groupe unitaire U(*E*). Groupe U(*n*) des matrices unitaires d'ordre *n*.

4. Calcul matriciel et normes euclidiennes

§ a) Calcul de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace et de la distance d'un point à un sous-espace. Application aux problèmes de moindres carrés ; minimisation de $\|AX-B\|^2$, où $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et rang $A = p$.

§ b) Décomposition d'un élément M de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sous la forme $M = QR$, où Q est orthogonale et R est triangulaire supérieure, par la méthode de Householder.

5. Réduction des endomorphismes symétriques et des endomorphismes hermitiens

§ a) Diagonalisation d'un endomorphisme symétrique (resp. hermitien) dans une base orthonormale.

Diagonalisation d'une matrice symétrique (resp. hermitienne) au moyen d'une matrice orthogonale (resp. unitaire).

La plus grande valeur propre d'une matrice symétrique A est égale à $\sup_{X \neq 0} \frac{{}^t XAX}{{}^t XX}$

b) Formes bilinéaires symétriques sur un espace euclidien, formes quadratiques, polarisation. Endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique ; réduction dans une base orthonormale.

V. Géométrie affine et euclidienne

Dans ce chapitre, l'étude est placée dans le plan et l'espace.

1. Calcul barycentrique ; repérage

a) Sous-espaces affines ; direction d'un sous-espace affine.

b) Repères affines, coordonnées barycentriques.

c) Parties convexes.

d) Repères cartésiens, polaires, cylindriques et sphériques. Changement de repère orthonormal.

2. Configurations

a) Position relative de deux plans dans l'espace. Plans perpendiculaires. Plan médiateur d'un segment.

b) Cercles dans le plan. Puissance d'un point par rapport à un cercle.
Ensemble des points M dont le rapport des distances à deux points A et B est constant, ou tels que l'angle de droites (ou de demi-droites) (MA, MB) soit constant

c) Sphères. Intersection d'une sphère et d'un plan, de deux sphères.

d) Coniques. Définitions focales, bifocales ; tangente et normale en un point ; ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale ; hyperbole rapportée à ses asymptotes. Équation cartésienne d'une conique ; réduction en repère orthonormal. Représentations paramétriques d'une conique.
Équation polaire d'une conique dont un foyer est à l'origine, la directrice associée et l'excentricité étant données.

3. Transformations

a) Applications affines ; effets sur la barycentration et sur la convexité. Application linéaire associée. Projections, affinités, symétries.

b) Groupe des transformations affines. Morphisme canonique du groupe affine sur le groupe linéaire ; groupe des translations, groupe des homothéties-translations. Isomorphisme canonique du stabilisateur d'un point *O* sur le groupe linéaire.

c) Groupe des isométries, groupe des déplacements. Les réflexions engendrent le groupe des isométries ; dans l'espace, les demi-tours engendrent le groupe des déplacements.

Similitudes planes directes et indirectes.

d) Classification des déplacements et des isométries du plan et des déplacements de l'espace à partir de l'ensemble des points invariants.

e) Exemples de recherche du groupe des isométries laissant globalement invariante une configuration du plan ou de l'espace. Exemples de recherche de transformations affines transformant une configuration en une autre.

4. Emploi des nombres complexes en géométrie

a) Racines de l'unité et polygones réguliers.

b) Adjonction d'un point à l'infini au plan complexe.

c) Transformations $z \mapsto a\bar{z} + b$ et $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

§ d) Lignes de niveau des fonctions $z \mapsto z - a$, $z \mapsto \mathrm{Arg}\,(z-a)$, $z \mapsto \left|\dfrac{z-a}{z-b}\right|$ et $z \mapsto \mathrm{Arg}\dfrac{z-a}{z-b}$.

Exemples de familles de courbes orthogonales associées à des transformations simples du plan complexe.

3. ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

I. Suites et fonctions

1. Suites de nombres réels et de nombres complexes

a) Suites convergentes, divergentes ; suites extraites.

Opérations algébriques sur les limites. Relations de comparaison : domination (*u* est dominée par *v*), prépondérance (*u* est négligeable devant *v*) et équivalence (*u* est équivalente à *v*). Notations $u = O(v)$, $u = o(v)$ ou $u \ll v$, et $u \sim v$.

b) Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Toute suite croissante majorée de nombres réels converge. Suites adjacentes. Développement décimal d'un nombre réel. Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

c) Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes converge. De toute suite bornée de nombres réels ou complexes, on peut extraire une suite convergente. Théorème du point fixe pour une application contractante d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$

dans lui-même.

§ d) Étude du comportement asymptotique de suites. Approximation d'un nombre réel ou complexe au moyen de suites : rapidité de convergence et performance d'un algorithme. Accélération de convergence : méthode de Richardson-Romberg.

§ e) Exemples d'étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et par une condition initiale.

Approximation d'une solution d'une équation numérique. Méthode de dichotomie. Méthode des approximations successives ; méthodes de Newton, d'interpolation linéaire et d'ajustement linéaire.

2. Fonctions d'une variable réelle

Les fonctions étudiées dans ce paragraphe sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ *et à valeurs réelles ou complexes.*

a) Limite d'une fonction en un point ; continuité en un point. Opérations sur les limites et sur les fonctions continues. Image d'une suite convergente par une fonction continue.

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point domination, prépondérance et équivalence.

b) Image d'un intervalle par une fonction continue, image d'un segment. Continuité de la fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle.

3. Espaces vectoriels normés, réels ou complexes

Les applications étudiées dans ce paragraphe sont définies sur une partie d'un espace vectoriel normé et à valeurs dans un espace vectoriel normé.

a) Normes sur un espace vectoriel réel ou complexe.

Norme, distance associée, boules. Parties bornées, diamètre d'une partie.

Distance d'un point à une partie non vide. Applications lipschitziennes. Produit d'une famille finie d'espaces normés.
Exemples de normes usuelles sur les espaces de suites et de fonctions.

b) Voisinages d'un point d'un espace vectoriel normé, ouverts, fermés ; adhérence, intérieur et frontière d'une partie, parties denses, points isolés, points d'accumulation.

Distance induite sur une partie ; voisinages d'un point, ouverts et fermés d'une partie.

c) Limite d'une application suivant une partie, continuité en un point.

Applications continues, caractérisation par image réciproque des ouverts ou des fermés. Continuité d'une application composée ; homéomorphismes. Applications uniformément continues.

d) Suites convergentes, divergentes. Caractérisation des points adhérents et des applications continues à l'aide de suites.

e) Caractérisation des applications linéaires continues, norme d'une application linéaire continue. Normes équivalentes.

Exemples de normes matricielles.

f) Opérations algébriques sur les limites. Algèbre des fonctions numériques continues.

Algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, base canonique de cette algèbre.

4. Espaces complets

a) Suites de Cauchy, espaces complets ; $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont complets. Parties complètes ; les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées.

b) Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé. Séries convergentes, divergentes, absolument convergentes (c'est-à-dire

telles que $\sum \|u_n\| < +\infty$). Dans un espace de Banach, critère de Cauchy pour la convergence d'une série, convergence des séries absolument convergentes.

c) Théorème du point fixe pour les contractions d'une partie fermée d'un espace complet.

d) Critère de Cauchy pour les applications (existence d'une limite en un point).

5. Espaces vectoriels de dimension finie

a) Équivalence des normes. Toute suite de Cauchy est convergente. De toute suite bornée on peut extraire une suite convergente. Continuité des applications linéaires et multilinéaires.

b) Définition (séquentielle) des parties compactes. Les parties compactes sont les parties fermées bornées.
Image continue d'un compact, application aux fonctions numériques. Continuité uniforme d'une application continue sur un compact.

6. Espaces préhilbertiens réels ou complexes

Produit scalaire (dans le cas complexe, linéaire à droite, semi-linéaire à gauche), norme associée, inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme.

Théorème de Pythagore. Famille orthonormale, méthode de Schmidt.

Existence d'une base orthonormale dans un espace de dimension finie. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, distance à un tel sous-espace.

Exemples de suites de polynômes orthogonaux.

7. Suites d'applications à valeurs dans un espace de Banach

Convergence simple, convergence uniforme. Pour des applications définies sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$: convergence uniforme sur tout compact. Continuité et limite d'une application définie comme limite d'une suite uniformément convergente.

Critère de Cauchy de convergence uniforme. L'espace des applications bornées d'un ensemble dans un espace de Banach, muni de la norme uniforme, est complet. Il en est de même pour l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues d'un espace normé dans un espace de Banach.

8. Notions sur la connexité

Parties connexes ; les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Image d'une partie connexe par une application continue, théorème des valeurs intermédiaires. Connexité par arcs ; elle implique la connexité et, dans le cas d'un ouvert d'un espace vectoriel normé, elle lui équivaut.

II. Fonctions d'une variable réelle : calcul différentiel et intégral

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle non réduit à un point et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$

1. Approximation des fonctions sur un segment

Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier ; approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions continues affines par morceaux et par des fonctions polynomiales. Interpolation de Lagrange.

2. Dérivation

a) Opérations sur les dérivées : linéarité, produit, quotient, fonctions composées, fonctions réciproques.

b) Inégalité des accroissements finis pour une fonction continue sur un intervalle et dérivable sur son intérieur ;

caractérisation des fonctions constantes et des fonctions lipschitziennes. Prolongement des fonctions de classe C^1 sur un intervalle privé d'un point.

c) Extrémums locaux des fonctions dérivables à valeurs réelles. Théorème de Rolle.

d) Fonction de Classe C^k (k entier naturel ou k infini) Si deux fonctions sont de classe C^k, leur composée l'est encore. Caractérisation des C^k-difféomorphismes parmi les fonctions de classe C^k ($k \geq 1$). Formule de Leibniz. Définition des fonctions de classe C^k par morceaux : une fonction f est dite de classe C^k par morceaux sur un segment $[a,b]$ s'il existe une suite finie strictement croissante $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$ telle que la restriction de f à chacun des $]a_i,a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe C^k sur $[a_i,a_{i+1}]$; elle est dite de classe C^k par morceaux sur un intervalle quelconque si sa restriction à tout segment est de classe C^k par morceaux.

e) Fonctions à valeurs réelles : fonctions convexes. Caractérisation des fonctions convexes de classe C^1 par la croissance de la dérivée première et par la position de la courbe par rapport aux tangentes.

3. Intégration sur un intervalle compact

Les seules connaissances exigibles portent sur l'intégration des fonctions continues par morceaux.

a) Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment. Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.

b) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

Notations : $\int_I f(t)dt$; $\int_a^b f(t)dt$.

Linéarité. Si $a \leq b$, $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt$.

Pour les fonctions à valeurs réelles, croissance de l'intégrale.
Pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, inégalité de Cauchy-Schwarz.

c) Additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.
Approximation de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$ par des sommes de Riemann associées à des subdivisions de $[a,b]$.

d) Primitives d'une fonction continue sur un intervalle. Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral : soit f une fonction continue sur I ; pour tout point a de I, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant au point a ; inversement, pour toute primitive F de f sur I, et pour tout couple (a,b) de points de I, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.
En particulier, pour toute fonction g de classe C^1 sur I, et pour tout couple (a,b) de points de I,

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt \ .$$

Intégration par parties, changement de variable.

Exemples de calculs de primitives.

e) Inégalité des accroissements finis relative à un couple de fonctions de classe C^1, l'une vectorielle, l'autre réelle. Formule de Taylor à l'ordre p avec reste intégral pour une fonction de classe C^{p+1} ; inégalité de Taylor-Lagrange.

§ f) Calcul des valeurs approchées d'une intégrale.
Méthode du milieu (ou des tangentes).
Méthode des trapèzes, méthode de Simpson : majoration du reste. Algorithmes d'approximation d'une intégrale par ces deux méthodes.

4. Étude locale des fonctions

a) Développements limités, opérations sur les développements limités.

b) Exemples simples de développements asymptotiques.

Intégration des relations de comparaison au voisinage d'un point entre des fonctions continues ; intégration des développements limités. Théorème de Taylor-Young (existence d'un développement limité d'ordre p pour une fonction de classe C^p).

5. Fonctions usuelles

a) Fonctions exponentielles et logarithmes, fonctions puissances, fonctions hyperboliques directes et réciproques.

b) Fonctions circulaires directes et réciproques. Fonction $t \mapsto e^{at}$, où a est complexe.

c) Équations fonctionnelles des fonctions linéaires, exponentielles ; logarithmes et puissances.

6. Intégrales impropres

a) Intégrales convergentes, divergentes ; critère de Cauchy. Convergence absolue. Emploi de l'intégration par parties.

b) Intégrales de fonctions positives. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Intégration des relations de prépondérance et d'équivalence au voisinage de $+\infty$: cas des intégrales convergentes, cas des intégrales divergentes.

7. Intégrales dépendant d'un paramètre

a) Passage à la limite uniforme dans les intégrales de fonctions continues sur un segment : application à la dérivation de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1.

Exemples de passage à la limite dans les intégrales impropres.

b) Continuité et intégration des fonctions de la forme $x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$, où f est continue ; dérivation lorsqu'en outre $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue.

Exemples d'étude de fonctions définies par des intégrales.

c) Convergence en moyenne, en moyenne quadratique : normes associées.

III. Séries

1. Séries de nombres réels ou complexes

a) Séries à termes positifs. Emploi des relations de comparaison pour l'étude de la convergence. Sommation des relations de prépondérance et d'équivalence ; cas des séries convergentes, cas des séries divergentes.

Comparaison à une série géométrique : règles de Cauchy et de D'Alembert.

Comparaison à une intégrale impropre, Convergence des séries de Riemann ; comparaison à une série de Riemann.

b) Séries à termes réels ou complexes. Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; majoration du reste.

Exemples d'emploi de la transformation d'Abel. Exemples d'emploi d'un développement asymptotique du terme général.

c) Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire. Série produit de deux séries absolument convergentes :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

d) Exemples d'encadrement ou d'évaluation asymptotique des restes d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente.

§ e) Recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

2. Séries de fonctions

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ *ou sur* $\mathbb{C}$.

a) Convergence simple, convergence uniforme sur un ensemble d'une série de fonctions ; convergence normale (pour la norme uniforme).

b) Continuité et limite en un point de la somme d'une série uniformément convergente. Intégration terme à terme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur un segment ; application à la dérivation terme à terme d'une série de fonctions de classe C^1.
c) Exemples d'étude de fonctions définies par des séries.

3. Séries entières

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

a) Séries entières d'une variable complexe ; rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence, convergence normale sur tout compact du disque de convergence.

b) Séries entières d'une variable réelle : intégration et dérivation terme à terme dans l'intervalle (ouvert) de convergence.

Développement en série entière de e^x, $\ln(1+x)$ et $(1+x)^\alpha$, où α est réel.

c) Définition de $\exp z$ (ou e^z), $\cos z$ et $\sin z$ pour z complexe. Exponentielle d'une somme, extension des formules de trigonométrie.

4. Séries de Fourier

a) Polynômes trigonométriques ; orthogonalité des fonctions $x \mapsto e^{inx}$. Coefficients et série de Fourier d'une fonction f 2π-périodique continue par morceaux à valeurs complexes (expression sous forme exponentielle, expression en cosinus et sinus). Sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$ de la série de Fourier de f ; propriété de meilleure approximation en moyenne quadratique.

b) Lorsque f est continue par morceaux, convergence de S_n vers f en moyenne quadratique ; formule de Parseval. Théorème de Dirichlet ; convergence de $S_n(x)$ vers la demi-somme des limites à droite et à gauche de f au point x lorsque f est de classe C^1 par morceaux. Convergence normale de la série de Fourier d'une fonction continue et de classe C^1 par morceaux.

5. Emploi des séries entières et des séries de Fourier

Exemples de recherche de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle.

§ Exemples d'utilisation de tels développements pour obtenir des valeurs approchées d'une fonction.

Exemples d'emploi de séries entières pour la recherche de solutions d'équations différentielles.

IV. Équations différentielles

1. Systèmes linéaires d'ordre 1

a) Écriture matricielle $X' = A(t)X + B(t)$ où A (respectivement B) désigne une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $M_n(\mathbb{C})$ (respectivement $\mathbb{C}^n$). Exis-tence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy (théorème admis). Dimension de l'espace vectoriel des solutions sur I de l'équation $X' = A(t).X$. Méthode de variation des constantes.

b) Systèmes à coefficients constants : exponentielle d'un endomorphisme ; application au problème de Cauchy. Résolution

du système $X' = AX$ par réduction de A à une forme diagonale ou triangulaire.

2. Équations linéaires scalaires

a) Équation $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, où a, b, c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes. Système d'ordre 1 associé, étude du problème de Cauchy ; solutions de l'équation sans second membre, méthode de variation des constantes. Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation sans second membre associée ne s'annulant pas sur I.

b) Équations linéaires à coefficients constants. Dimension de l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Cas où le second membre est une exponentielle polynôme.

3. Notions sur les équations non linéaires

a) Solutions d'une équation différentielle $x' = f(t,x)$ (resp. $x'' = f(t,x,x')$), où f est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (resp. de $\mathbb{R}^3$). Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.

§ b) Recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 par la méthode d'Euler.

c) Résolution des équations des types suivants (en liaison avec la géométrie) : équation associée à une forme différentielle exacte, équation à variables séparables, équation homogène :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

d) Exemples d'emploi de changements de variable ou de fonction (en liaison avec des propriétés d'invariance), d'échange de la variable et de la fonction, de paramétrages.

§ e) Exemples d'étude qualitative des courbes intégrales d'une équation différentielle. Exemples de recherche des courbes intégrales d'un champ d'éléments de contact ou d'un champ de vecteurs dans le plan.

V. Notions sur les fonctions de plusieurs variables réelles

1. Calcul différentiel

Les fonctions considérées dans ce paragraphe sont définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

a) Limite, continuité, dérivée selon un vecteur, dérivées partielles. Applications de classe C^1 (ou continûment différentiables).
b) Développement limité à l'ordre 1 d'une application de classe C^1 ; différentielle, matrice jacobienne, jacobien. Si deux applications sont de classe C^1, leur composée l'est encore ; difféomorphismes. Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque (les applications considérées étant de classe C^1). Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe C^1. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1 ; caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert connexe.

c) Dérivées partielles d'ordre k ; théorème de Schwarz. Définition des applications de classe C^k sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (k entier naturel ou k infini). Si deux applications sont de classe C^k, leur composée l'est encore ; définition des C^k-difféomorphismes ($k \geqslant 1$).

d) Gradient d'une fonction numérique de classe C^1, points critiques. Formule de Taylor-Young pour une fonction numérique de classe C^1. Étude de l'existence d'un extrémum local (c'est-à-dire d'un maximum local ou d'un minimum local) d'une fonction numérique de deux variables de classe C^2 en un point critique où $rt - s^2 \neq 0$.

2. Calcul intégral

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions de ce paragraphe.

a) Champs de vecteurs. Divergence, rotationnel. Intégrales curvilignes. Potentiel scalaire ; condition nécessaire et suffisante d'existence pour un champ de classe C^1 sur un ouvert étoilé.

b) Intégrales doubles et intégrales triples. Linéarité, croissance ; additivité par rapport aux ensembles. Calcul par intégrations successives. Changements de variables ; passage en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques. Exemples de calculs d'aires planes et de volumes.

VI. Notions de géométrie différentielle

1. Courbes et surfaces

L'étude théorique est placée dans des hypothèses très larges. Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour ce paragraphe sont admises.

a) Définitions diverses d'une courbe (plane ou non) et d'une surface, par paramétrages ou par équations.

b) En un point régulier ; tangente à une courbe, plan normal ; plan tangent à une surface, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.

c) Étude locale d'une courbe paramétrée plane : position de la courbe par rapport à une droite ; concavité en un point birégulier, rebroussements, inflexions. Étude de branches infinies. Construction de courbes paramétrées.

d) Étude locale d'une courbe paramétrée de l'espace : plan osculateur en un point birégulier, étude locale en un point trirégulier.

e) Enveloppe d'une famille de droites dans le plan, donnée par une équation $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$, sur un intervalle où $ab' - ba'$ ne s'annule pas.

f) Étude des courbes planes définies par des coordonnées polaires : étude locale, comportement asymptotique, construction.

2. Propriétés métriques des courbes planes

Longueur d'un arc paramétré de classe C^1, abscisse curviligne. Pour un arc birégulier du plan orienté, repère de Frenet, courbure, centre de courbure, développée, développantes.

3. Cinématique du point

a) Vitesse, accélération. Trajectoire, loi horaire. Moment cinétique, dynamique. Énergie cinétique.

b) Exemples de mouvements. Mouvements rectilignes, mouvements circulaires. Mouvements à accélération centrale ; oscillateurs harmoniques, mouvement des planètes.

4. Probabilités et statistiques

1. Espaces probabilisés

Expériences aléatoires . Evénements. Parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste à propos des opérations sur les événements.

Tribus. Probabilités. Espace probabilisé (Ω, A, P). Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales ; formule de Bayes. Indépendance (en probabilité) d'événements ; indépendance mutuelle d'un nombre fini d'événements ; indépendance deux à deux.

Les candidats devront savoir utiliser sur des exemples simples la formule donnant la probabilité d'une réunion finie d'événements (formule de Poincaré, ou de crible).

La théorie des espaces probabilisés produits n'est pas au programme.

Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur les espaces probabilisés.

2. Variables aléatoires

Définition d'une variable aléatoire réelle, ou plus généralement à valeurs dans IR^n. Evénements liés à une variable aléatoire. On admettra que la somme et le produit de deux variables aléatoires sont des variables aléatoires.

Les propriétés générales des variables aléatoires sont hors programme. L'objectif est la mise en fonctionnement de ce concept sur les exemples décrits dans les trois alinéas qui suivent. La tribu borélienne de IR n'est pas au programme.

a) Variables aléatoires réelles discrètes

Loi de probabilité. Fonction de répartition $F(x)=P[X\leq x]$.

Moments : espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type.

Variables centrées, variables réduites.
Variable aléatoire y = g(X) fonction d'une variable aléatoire discrète X, où g est définie sur l'ensemble des valeurs de X.
Lois discrètes usuelles : loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, hypergéométrique, géométrique, de Poisson.
b) Vecteurs aléatoires (à valeurs dans R^n) discrets. Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans IR^2. Lois marginales.
Lois conditionnelles. Indépendance de deux variables aléatoires réelles.
Loi de probabilité d'un vecteur à valeurs dans IR^n. Indépendance de n variables aléatoires réelles.
Linéarité de l'espérance mathématique. Espérance mathématique du produit de deux variables aléatoires indépendantes. Variance d'une somme de variables aléatoires.
Covariance. Coefficient de corrélation linéaire. Stabilité pour la somme des lois binomiales, des lois de Poisson.

Dans de nombreuses situations, on rencontre des exemples simples de fonctions de plusieurs variables aléatoires (sommes, produits). On admettra que si X1,..., Xn sont indépendantes, toute fonction de (X1,..., Xp) est indépendante de toute fonction de (Xp+1,..., Xn). Aucune théorie générale des fonctions de plusieurs variables aléatoires n'est au programme.
c) Variables aléatoires à densité
On dit qu'une variable aléatoires X à valeurs réelles admet une densité f si sa fonction de répartition peut s'écrire sous la forme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

où f est une fonction à valeurs réelles positives ayant un nombre fini de points de discontinuité et telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

Moments, espérance (ou moyenne), moment d'ordre 2, variance, écart-type. Variable centrées, variables réduites.
Exemples simples de fonctions d'une variable aléatoire (tels que aX + b, X^2 , exp X...). Lois définies par une densité usuelle : loi uniforme, exponentielle, normale (ou de Laplace-Gauss). Densité d'un vecteur aléatoire à valeurs dans IR^2. Indépendance de deux variables aléatoires réelles à densité. Aucune difficulté théorique ne doit être soulevée sur ces questions.
3. Convergence des suites de variables aléatoires. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (cas des variables discrètes et des variables à densité).

Convergence en probabilité. Loi faible des grands nombres.
Approximation de la loi hypergéométrique par la loi binomiale..
Approximation de la loi binomiale par la loi de Gauss, par la loi de Poisson.
Enoncé du théorème limite central.
L'étude de la convergence en loi n'est pas au programme.
4. Notions de statistiques.

a) Statistique descriptive : paramètres de position (moyenne, médiane, quantiles, modes) et de dispersion (écart-type, variance). Divers modes de représentation graphique.
b) Echantillons. Intervalle de confiance d'une moyenne ou d'une fréquence.
c) Tests d'hypothèse ; les deux types de risque d'erreur.
d) Tests de paramètres : estimation du paramètre d'une loi binomiale, de la moyenne m d'une loi normale. Test unilatéral, bilatéral.

Comparaison de deux moyennes.

ANNEXE II

Instructions et commentaires

Ils figurent au BOEN n° 33 du 26 septembre 1991 et au BO Spécial n°5 du 21 octobre 1993.

Pour les épreuves écrites les candidats doivent se munir de calculatrice afin de s'en servir lorsque ce sera autorisé.

Pour les épreuves orales les calculatrices personnelles sont interdites. Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du C.A.P.E.S.

3. Statistiques

3.1 Evolution et résultats globaux

Année	Postes	Inscrits	Présents aux Deux épreuves écrites	Admissibles	Présents aux deux épreuves orales	Admis
CAPES 2001	990	6972	5676	2109	1946	990 *
CAFEP 2001	215	1095	889	200	194	113
CAPES 2002	1125	6166	4948	2213	2065	1125 *
CAFEP 2002	230	906	745	192	189	118
CAPES 2003	1195	5755	4428	2328	2174	1195
CAFEP 2003	230	846	636	214	209	116
CAPES 2004	1003	5604	4194	2040	1900	1003
CAFEP 2004	177	933	658	205	192	103
CAPES 2005	1310	6086	4074	2473	2236	1310
CAFEP 2005	177	1051	644	279	265	139
CAPES 2006	952	5787	3983	2043	1796	952
CAFEP 2006	135	1096	689	283	265	126

* *En 2001 et 2002, des listes complémentaires avaient été publiées.*

La diminution inattendue du nombre des postes offerts n'a pas eu d'effet cette année sur les inscriptions, dont le nombre a peu évolué. Il est connu d'après diverses études que les effets se mesurent en moyenne à quatre ans.

Les abandons à l'oral.
L'augmentation du pourcentage de candidats admissibles ne s'étant pas présentés aux épreuves orales est frappante[1] : environ 7% en 2003 et 2004, 10% en 2005, 12% en 2006. Il est permis d'y voir une baisse de l'attractivité du CAPES externe. Nous n'avons pas mené d'enquête exhaustive auprès des candidats abandonnant de cette manière, mais il y a eu des contacts téléphoniques assez nombreux. Avec les renseignements statistiques disponibles, nous avons pu dégager les quelques tendances qui suivent.

Il faut tenir compte en premier lieu des candidats d'un bon niveau et simultanément admissibles au CAPES et à l'agrégation. Certains ont démissionné car ils savaient déjà avant la fin du CAPES qu'ils étaient reçus à l'agrégation. D'autres préfèrent continuer le cas échéant à se préparer à l'agrégation plutôt que de tenter d'être reçus au CAPES, auquel ils se sont inscrits sans réelle motivation et sans une préparation spécifique. Ces candidats expliquent la partie de gauche du tableau qui suit.

[1] La grande majorité de ces candidats ne se présente même pas à la première épreuve orale. Nous en contactions certains au téléphone. Ceux qui abandonnent en cours d'oral sont très minoritaires : moins d'un dixième du total des abandons.

Taux de non-présentation à l'oral en fonction du rang d'écrit

Rangs	De 1 à 204	De 205 à 408	De 409 à 612	De 613 à 816	De 817 à 1020	De 1021 à 1224	De 1225 à 1428	De 1429 à 1632	De 1633 à 1836	De 1837 à 2043
Taux d'abandon	30%	16%	10%	8%	7%	8%	9%	10%	9%	13%

(statistiques sur le CAPES seul)

Une fois ces candidats écartés, on est surpris par la régularité des chiffres : de nombreux candidats se sentent insuffisamment préparés aux épreuves orales, et ceci quasi-indépendamment de leurs capacités telles que l'écrit a permis de les mesurer.
Enfin, les femmes et les hommes se comportent très différemment :

% admissibles ne terminant pas les épreuves orales	CAPES	CAFEP
femmes	7,5	2
hommes	15,5	10

Faudrait-il voir dans l'augmentation du nombre de défections un effet regrettable de l'image qu'ont de nombreux candidats de leurs probables débuts dans la carrière d'enseignant, à savoir celle du jeune « prof » débutant envoyé dans un collège d'une zone particulièrement difficile ?

3.2 Statistiques par catégories

Sont considérés comme présents les candidats qui ont des notes non nulles à toutes les épreuves écrites.
Les candidats aux concours étrangers gérés par le jury ne sont pas comptabilisés.
Les candidats étrangers aux concours français sont comptés normalement.

CAPES externe de Mathématiques

	Inscrits	**Présents**	**admissibles**	**Admis**
Ensemble	5784	3981	2040	952
Femmes	2511	1866	892	474
Français et U.E.	5762	3974	2037	952
Union Européenne	26	13	4	2
Etrangers hors UE	22	7	3	0
Moins de 30 ans	4256	3294	1736	845
Moins de 25 ans	2411	2066	1187	621

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	761	301	138	46
ELEV.IUFM.1ANN.	1842	1715	903	530
ETUDIANT	1187	898	566	238
CADRE CONV.COL	210	71	34	10
SANS EMPLOI	751	358	154	50
VAC.2ND DEGRE	247	163	66	25
MA	93	51	16	7
CONT.2ND DEGRE	470	272	105	32
ASSISTANT EDUC.	223	152	58	14

Catégories				
	I	P	a	A
DIVERS	1990	1764	924	537
ETUDIANT	1187	898	566	238
ENS.TIT.MEN	150	57	29	10
AG.NON TIT.MEN	1219	737	289	91
HORS FP SS EMPL	1238	525	232	76

CAFEP-CAPES privé de Mathématiques

	Inscrits	Présents	admissibles	Admis
Ensemble	1096	676	283	126
Femmes	583	380	134	67
Moins de 30 ans	713	509	219	95
Moins de 25 ans	292	253	121	55

Professions				
	I	P	a	A
DIVERS	115	31	14	5
ELEV.IUFM.1ANN.	239	215	114	67
ETUDIANT	149	90	44	17
SECT.TERTIAIRE	16	10	2	0
SECT.INDUSTRIEL	9	7	4	2
SANS EMPLOI	133	54	24	10
FORMATEUR PRIVE	18	9	4	3
MAIT.OU DOC DEL	13	8	4	1
VAC.2ND DEGRE	54	31	6	3
VAC.ENS.SUP.	6	5	3	0
MA	264	179	49	12
CONT.2ND DEGRE	63	29	13	5
ASSISTANT EDUC.	17	8	2	1

Catégories				
	I	P	a	A
DIVERS	261	222	118	68
ETUDIANT	149	90	44	17
ENS.TIT.MEN	28	10	1	0
AG.NON TIT.MEN	422	257	76	22
ENSEIGN PRIVE	24	12	7	2
HORS FP SS EMPL	212	85	37	17

3.3 Résultats par académie

CAPES externe de Mathématiques

Académies				
	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	297	208	103	41
BESANCON	94	72	41	18
BORDEAUX	228	182	110	55
CAEN	124	95	47	22
CLERMONTFERRAND	89	66	41	29
DIJON	140	108	51	25
GRENOBLE	267	187	113	49
LILLE	430	328	153	74
LYON	295	188	104	44
MONTPELLIER	223	141	79	22
NANCY METZ	184	134	76	33
POITIERS	141	111	62	29
RENNES	266	206	108	53
STRASBOURG	203	135	68	41
TOULOUSE	311	215	125	63
NANTES	214	169	95	40
ORLEANS TOURS	156	117	68	31
REIMS	93	63	40	14
AMIENS	153	95	39	11
ROUEN	133	102	46	27
LIMOGES	57	45	25	13
NICE	192	128	55	30
CORSE	23	18	6	4
REUNION	116	69	17	7
MARTINIQUE	70	42	7	2
GUADELOUPE	105	69	8	3
GUYANNE	17	1	0	0
PARIS/CRET/VERS	1163	687	353	172

Centres d'écrit				
	I	P	a	A
DIVERS	105	68	19	11
AIX	297	208	103	41
AMIENS	153	95	39	11
BESANCON	94	72	41	18
BORDEAUX	165	129	82	42
BREST	87	61	34	13
CAEN	123	94	46	21
CLERMONT FERRAN	89	66	41	29
DIJON	109	86	47	22
GRENOBLE	267	187	113	49
LILLE	410	311	149	71
LIMOGES	57	45	25	13
LYON	295	188	104	44
MONTPELLIER	223	141	79	22
NANCY	184	134	76	33
NANTES	214	169	95	40
NICE	190	127	54	30
ORLEANS	95	64	40	18
PARIS	1162	686	353	172
PAU	63	53	28	13
POITIERS	138	110	62	29
REIMS	93	63	40	14
RENNES	179	145	74	40
ROUEN	132	101	46	27
STRASBOURG	202	134	67	41
TOULOUSE	311	215	125	63
TOURS	61	53	28	13
FORT DE FRANCE	70	42	7	2
POINTE A PITRE	105	69	8	3
SAINT DENIS REU	111	65	15	7

CAFEP-CAPES privé de Mathématiques

Académies	I	P	a	A
AIX MARSEILLE	61	36	14	6
BESANCON	17	7	1	0
BORDEAUX	57	36	19	14
CAEN	22	18	6	2
CLERMONTFERRAND	16	9	3	1
DIJON	19	16	7	2
GRENOBLE	45	28	14	7
LILLE	99	65	33	13
LYON	60	42	27	12
MONTPELLIER	41	23	10	4
NANCY METZ	32	12	7	4
POITIERS	14	10	5	2
RENNES	115	71	23	14
STRASBOURG	17	10	0	0
TOULOUSE	38	22	10	5
NANTES	129	90	41	19
ORLEANS TOURS	18	15	2	1
REIMS	6	4	0	0
AMIENS	11	8	5	2
ROUEN	23	11	3	1
LIMOGES	4	2	0	0
NICE	20	11	3	1
CORSE	2	0	0	0
REUNION	6	5	1	0
MARTINIQUE	7	2	0	0
GUADELOUPE	5	3	0	0
PARIS/CRET/VERS	212	120	49	16

Centres d'écrit	I	P	a	A
DIVERS	56	33	0	0
AIX	61	36	14	6
AMIENS	11	8	5	2
BESANCON	17	7	1	0
BORDEAUX	33	19	9	6
BREST	40	21	7	5
CAEN	20	16	6	2
CLERMONT FERRAN	16	9	3	1
DIJON	18	15	7	2
GRENOBLE	45	28	14	7
LILLE	98	64	33	13
LYON	60	42	27	12
MONTPELLIER	41	23	10	4
NANCY	32	12	7	4
NANTES	129	90	41	19
NICE	20	11	3	1
PARIS	211	120	49	16
PAU	24	17	10	8
POITIERS	14	10	5	2
RENNES	75	50	16	9
ROUEN	23	11	3	1
TOULOUSE	38	22	10	5
TOURS	8	7	2	1
SAINT DENIS REU	6	5	1	0

3.4 Répartition des notes

CAPES externe de Mathématiques :

Ecrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	10	7	4	11	10	8	12	11	10
épreuve 2 (sur 20)	10	7	4	11	10	8	12	11	9
Total écrit (sur 40)	20	14	9	22	19	17	23	21	19

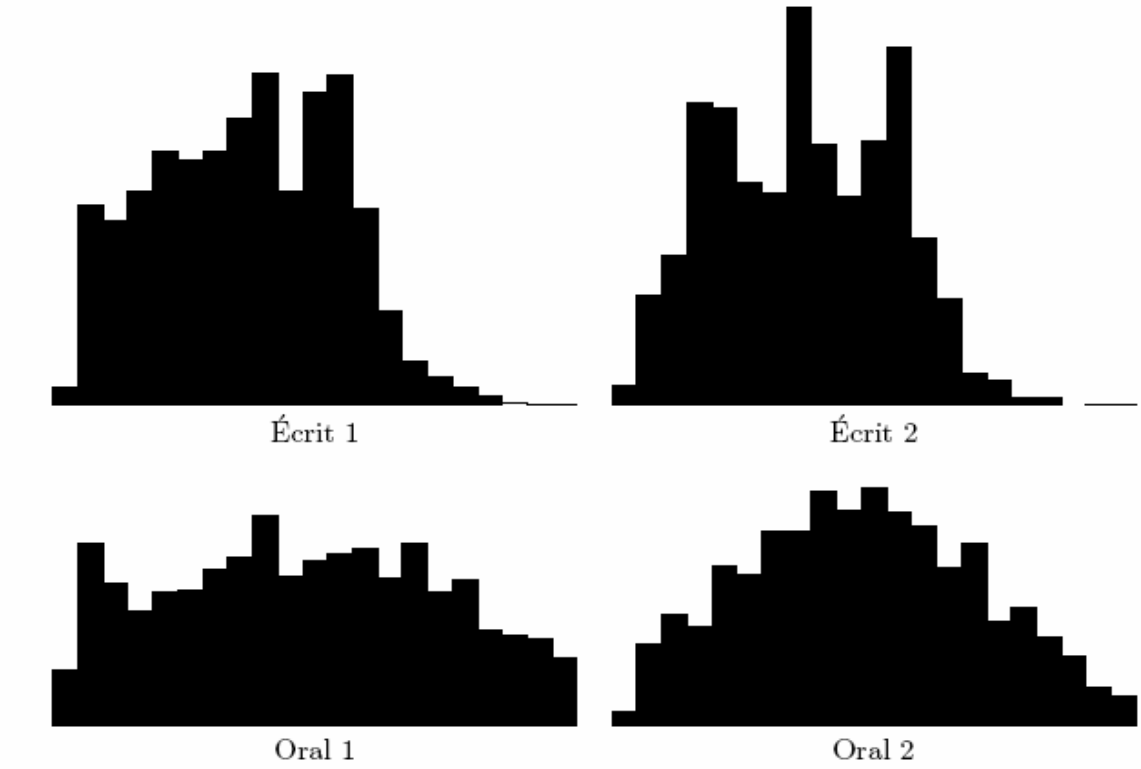
Ecrit, épreuve 1 moyenne des admis 10.74
Ecrit, épreuve 2 moyenne des admis 10.46
le total d'écrit est ramené sur 20

Ecrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	2	2	1	1	1	0
19	0	0	0	4	4	2	2	2	1
18	1	1	0	7	7	4	2	2	1
17	4	4	3	17	17	9	11	11	6
16	18	18	12	39	38	23	20	20	13
15	36	36	22	74	73	42	51	51	35
14	81	81	47	129	128	77	91	90	60
13	159	159	102	249	248	158	226	224	148
12	321	321	222	499	497	319	439	437	281
11	643	643	431	917	912	546	894	883	521
10	1010	1010	639	1314	1275	717	1229	1194	678
9	1371	1371	798	1584	1504	806	1493	1417	764
8	1788	1788	910	2004	1766	888	1824	1642	847
7	2225	2040	952	2368	1913	922	2328	1887	919
6	2623	2040	952	2691	1989	946	2596	1963	940
5	2959	2040	952	3001	2019	949	2879	2013	947
4	3299	2040	952	3323	2037	952	3257	2035	950
3	3593	2040	952	3595	2039	952	3640	2039	952
2	3828	2040	952	3828	2039	952	3829	2040	952
1	3960	2040	952	4082	2040	952	3967	2040	952
0	3981	2040	952	4103	2040	952	3992	2040	952

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	14	10	5	16	13	10
épreuve 2 (sur 20)	13	9	6	15	12	9
Total général (sur 80)	45	38	32	50	45	41

le total général est ramené sur 20

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	42	41	18	18
19	0	0	96	95	41	41
18	0	0	152	150	84	84
17	3	3	211	207	139	136
16	17	17	302	289	212	203
15	38	38	385	368	277	259
14	99	99	498	460	390	352
13	192	192	590	534	488	433
12	336	336	700	613	612	524
11	561	561	807	680	744	607
10	796	796	909	749	892	702
9	1100	952	1002	790	1026	765
8	1376	952	1132	838	1171	818
7	1566	952	1236	868	1292	865
6	1699	952	1333	899	1413	903
5	1767	952	1417	921	1507	920
4	1796	952	1500	934	1606	935
3	1796	952	1571	940	1667	946
2	1796	952	1660	946	1736	950
1	1796	952	1773	951	1787	952
0	1796	952	1807	952	1796	952



Seuil d'admissibilité : 14.40/40 (7.20/20)
Seuil d'admission : 38.00/80 (9.50/20)
Pas de liste complémentaire

Ecrit : quartiles sur les notes non nulles									
	Présents			admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	9	6	3	11	10	8	11	10	8
épreuve 2 (sur 20)	10	7	4	11	10	8	12	11	10
Total écrit (sur 40)	18	13	8	21	19	16	23	20	18

Ecrit, épreuve 1 moyenne des admis 10.05
Ecrit, épreuve 2 moyenne des admis 10.59
le total d'écrit est ramené sur 20

Ecrit : histogramme cumulé (sur 20)									
	Total			écrit 1			écrit 2		
	P	a	A	P	a	A	P	a	A
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	1	1	1	0	0	0
17	0	0	0	2	2	2	0	0	0
16	2	2	1	3	3	2	1	1	0
15	3	3	2	5	5	3	3	3	2
14	4	4	3	10	10	8	6	6	5
13	11	11	9	19	19	15	22	22	17
12	31	31	26	38	38	29	47	47	36
11	67	67	48	84	82	48	125	122	71
10	115	115	77	153	143	83	172	168	96
9	182	182	105	191	176	93	220	211	111
8	246	246	120	261	222	105	266	239	118
7	314	283	126	318	249	118	351	268	122
6	376	283	126	391	274	124	402	280	125
5	444	283	126	436	280	126	448	282	126
4	512	283	126	500	282	126	518	283	126
3	574	283	126	570	282	126	586	283	126
2	628	283	126	621	283	126	635	283	126
1	670	283	126	695	283	126	669	283	126
0	676	283	126	701	283	126	677	283	126

Oral : quartiles sur les notes non nulles						
	admissibles			Admis		
épreuve 1 (sur 20)	13	9	4	16	13	10
épreuve 2 (sur 20)	13	10	6	15	12	9
Total général (sur 80)	43	37	30	50	44	40

le total général est ramené sur 20

Oral et total général (sur 20)						
	Total		oral 1		oral 2	
	a	A	a	A	a	A
20	0	0	4	4	2	2
19	0	0	9	9	5	5
18	0	0	15	14	10	10
17	1	1	23	22	15	15
16	1	1	32	31	26	26
15	4	4	45	43	40	37
14	10	10	59	54	54	47
13	21	21	74	66	70	60
12	43	43	84	75	82	71
11	64	64	100	88	99	77
10	95	95	117	97	132	93
9	142	126	133	104	151	102
8	186	126	151	113	175	113
7	221	126	167	117	187	117
6	249	126	178	119	204	120
5	261	126	193	123	219	125
4	265	126	209	124	236	126
3	265	126	225	126	244	126
2	265	126	238	126	254	126
1	265	126	260	126	264	126
0	265	126	267	126	265	126

Écrit 1

Écrit 2

Oral 1

Oral 2

Seuil d'admissibilité : 14.40/40 (7.20/20)
Seuil d'admission : 38.00/80 (9.50/20)
Pas de liste complémentaire

4. Les épreuves écrites

Les épreuves écrites avaient lieu dans la première semaine du mois de mars 2006.

La proportion des candidats ayant abandonné à l'issue de la première épreuve est revenue à un niveau normal, et même particulièrement bas : moins de 3%. On trouve toujours quelques bonnes copies de première épreuve, suivies d'une absence en seconde épreuve. Nous trouvons aussi, comme d'habitude, quelques candidats fantaisistes (une dizaine) qui viennent à la seconde épreuve sans être venus à la première …

Il est rappelé que l'absence à une épreuve entraîne l'élimination du candidat. Le retard est aussi une cause d'élimination, les candidats arrivant après la distribution des sujets n'étant pas autorisés à composer.

La définition des épreuves proprement dites, les buts généraux qu'elles poursuivent, ainsi que le programme auquel elles sont limitées, sont détaillées dans les documents officiels (voir la partie qui leur est consacrée dans le rapport).

Les correcteurs élaborent leurs grilles de correction lors d'une réunion plénière, tenue après qu'ils aient eu le temps d'analyser les sujets et de lire un échantillon de copies. Chaque copie est ensuite corrigée deux fois, de manière totalement indépendante. Les deux correcteurs jumelés se concertent à la fin de leur travail pour décider de la note finale.

Aucun commentaire, aucune annotation particulière ne figure sur les copies. Seule la note finale après harmonisation y est inscrite. Les candidats qui souhaitent après coup revoir leur travail pour mieux comprendre le résultat obtenu peuvent, conformément aux dispositions de la loi n° 78.753 du 17 juillet 1978, obtenir satisfaction en s'adressant à la D.P.E qui conserve les copies pendant un an à cet effet.

De manière générale, les sujets des épreuves écrites sont construits dans le but de discriminer l'ensemble des candidats, des meilleurs aux plus faibles ; c'est pourquoi de très bonnes notes ont pu être attribuées à des copies n'abordant pas, et même de loin, l'ensemble du sujet. Ce fait s'explique aussi par le souci qu'ont les auteurs de sujets de construire des problèmes offrant un contenu suffisamment construit, qui aboutisse notamment à un ou des résultats significatifs, et aussi la nécessité de ne pas trop centrer le texte sur une partie trop réduite du programme.
Les questions qui recevront un poids particulièrement significatif dans le classement des candidats ne sont pas distinguables dans l'énoncé (d'autant qu'elles ne s'imposent parfois qu'au moment de la correction des copies), ce qui empêche d'estimer raisonnablement la note à la lecture d'une copie isolée, et en conséquence empêche le candidat *par lui-même* d'avoir une idée raisonnable de la note qu'il recevra.

5. Les épreuves orales

5.1 Organisation

Elles ont eu lieu du 28juin au 21 juillet 2006 au lycée Lakanal (Sceaux). Les interrogations avaient lieu tous les jours, dimanches et quatorze juillet inclus. Une pause a eu lieu à mi-parcours du 7 au 10 juillet.
Le jury était séparé en 24 commissions de trois personnes. La composition de ces commissions est déterminée en tenant compte de l'obligation de croiser les compétences, ce

qui conduit à faire travailler ensemble des personnes intervenant aux divers niveaux possibles, enseignement secondaire, enseignement post-baccalauréat, enseignement supérieur, université et IUFM, inspection pédagogique régionale. La présence de personnels enseignant en IUFM fait pour chaque cas l'objet d'une réflexion appropriée, le but poursuivi étant d'arbitrer au mieux entre deux nécessités contradictoires : d'un côté, éviter autant que possible des situations où il y aurait confusion des rôles de formateur et d'évaluateur, et d'un autre côté, éviter de trop distendre les liens avec les centres de formation.
Les candidats sont convoqués en début d'après-midi pour l'épreuve d'exposé et le lendemain matin pour l'épreuve sur dossier. Ils passent successivement devant deux commissions jumelées qui échangent leurs candidats pour la deuxième épreuve. Chaque commission fait passer les deux types d'épreuves. Un membre de la présidence accueille les candidats avant chaque épreuve afin d'en préciser les modalités et rappeler quelques instructions à son sujet.
Les candidats pouvaient fournir une adresse électronique lors de leur inscription. Immédiatement après signature de la liste des admissibles, les résultats ont été transmis aux adresses connues, (*plus de 95% des candidats admissibles ont été dans ce cas cette année*).

Les références des textes officiels décrivant la forme des épreuves orales sont rappelées dans la partie 1.2 de ce rapport.

5.2 Conseils pratiques.

Les demandes de déplacements ou reports de la date de la convocation *ne sont pas examinées par la présidence du jury, sauf dans les deux cas qui suivent* :
- coïncidence entre deux convocations à des concours de recrutement de l'Education Nationale auxquels le candidat est simultanément admissible (CAPES et agrégation, ou CAPLP, ou CRPE par exemple)
- cas de force majeure, maladie, ou événement familial d'importance majeure.

Lorsque ces demandes peuvent être prises en considération, il n'est pas toujours possible d'y répondre favorablement. Réaliser les arrangements correspondants *n'est pas* une obligation du jury. La convocation aux épreuves orales comporte un accusé de réception à renvoyer obligatoirement, par retour du courrier, au président du jury. Les candidats négligeant cette obligation compliquent et accroissent la tâche de la présidence. En effet, l'organisation quotidienne des convocations ne permet de tenir compte de demandes légitimes de report de convocation que si la présidence du jury est en mesure de trouver les « places » vacantes laissées par les candidats qui, pour diverses raisons, renoncent à passer les épreuves orales.

Il est rappelé aux candidats que l'adresse qu'ils fournissent lors de leur inscription doit être une adresse permanente, valable pour toute la durée des épreuves et pour la phase d'affectation. Ils doivent éventuellement prendre toute disposition pour que le courrier puisse les atteindre pendant toute la période concernée (cf. B.O. spécial n° 13 du 31 août 1995, p. 13).

Une tenue vestimentaire correcte est souhaitable : ce qui est convenable en villégiature ne l'est pas nécessairement devant le jury d'un concours de recrutement. L'utilisation des téléphones portables est interdite dans les locaux du concours, tant pour éviter d'éventuelles fraudes que pour ne pas déranger les candidats par des sonneries intempestives.

Les oraux sont publics. Le nombre important des visiteurs conduit la présidence du jury à réglementer leurs déplacements dans les locaux du concours. Ils ne peuvent y pénétrer que pour accompagner une vague de candidats dans les salles de commission et ne doivent en

aucun cas parler aux candidats ou stationner dans les couloirs. Afin de ne pas trop perturber ni les candidats ni le bon fonctionnement du concours, le nombre des visiteurs pour une interrogation donnée est limité.

Le CAPES et le CAFEP sont des concours et non des examens ; comme à l'écrit, la note d'oral sert à classer les candidats les uns par rapport aux autres. Cette note a une valeur relative et ne cherche pas à refléter ce qui pourrait être la valeur objective d'une épreuve. Il est donc difficile voire impossible dans les faits pour le candidat de s'évaluer lui-même, et de prévoir la note qu'il recevra.

Les notes des épreuves orales font l'objet de deux saisies informatique indépendantes, suivies d'une confrontation des deux saisies et de l'édition régulière de listes retournées aux commissions pour vérification. Ces dispositifs rendent l'hypothèse d'une erreur de transmission improbable autant qu'il est humainement possible.

5.3 L'évaluation des épreuves orales

Á un concours de recrutement de l'enseignement secondaire, l'on se trouve au croisement d'exigences de nature assez diverses.
On pourrait se demander pourquoi l'évaluation des compétences purement disciplinaires est présente dans un tel concours, puisque celui-ci s'adresse aux titulaires d'une licence, et que les candidats ont ainsi déjà fait leurs preuves en ce domaine. Cette position mérite d'être discutée, et réfutée, avec soin.
Les licences délivrées par des systèmes de formations assez largement autonomes sont loin d'être uniformes, ce qui justifie déjà le maintien de la présence d'une évaluation disciplinaire au sein du CAPES. De plus, les licences ne peuvent pas toujours suffire en elles-mêmes si leur contenu n'a pas été prévu de manière spécifique pour convenir à un futur enseignant du secondaire[2]. Enfin, il est prévu que certaines personnes, quoique non titulaires d'une licence, ont le droit se présenter au concours. Tous ces facteurs plaident pour le maintien d'une évaluation disciplinaire forte dans les épreuves du CAPES.
Par leur position professionnelle, une majorité des interrogateurs aux épreuves orales sont naturellement attentifs en premier lieu au contenu proprement disciplinaire des prestations. En composant les commissions de manière à varier au mieux les points de vue, il est possible de faire en sorte que la capacité proprement professionnelle soit correctement prise en compte. Même si la vérification finale de l'aptitude à pratiquer le métier d'enseignant devant les élèves repose sur l'évaluation du stage, il est demandé au candidat, lors des deux épreuves orales, de montrer qu'il dispose des qualités nécessaires en matière de communication et de présence devant les auditeurs que sont les membres du jury.

Il n'y a pas de grille chiffrée d'évaluation pour les épreuves orales ; l'on peut simplement définir trois types de compétences pour lesquelles une insuffisance flagrante amène la commission à abaisser la note de manière significative ou déterminante :
- Les compétences en communication : élocution, clarté, attitude envers la commission et capacité de prendre en compte les questions, présentation du tableau, maîtrise du temps, de l'écrit au tableau, de la calculatrice et du rétroprojecteur, etc.
- Les compétences disciplinaires et techniques : l'absence de propositions ou d'affirmations mathématiquement inexactes, la présence relativement au thème traité de

[2] On observe fréquemment des exposés oraux construits par les candidats sans tenir compte des programmes de l'enseignement secondaire, ce qui à tout le moins montre le décalage de fait entre certains enseignements de licence et ce qui est nécessaire à un futur enseignant de collège ou de lycée.

connaissances et de résultats cohérents, l'absence de lacune fondamentale relativement à ce thème, le respect des consignes associées au thème et notamment celles concernant l'usage des calculatrices.

- Les compétences de nature pré-professionnelle : connaissance des programmes[3], capacité à construire des exposés et des choix d'exercices adaptés et progressifs, maîtrise à un niveau suffisant des propositions, démonstrations, solutions que le candidat propose de lui-même.

5.4 Première épreuve : exposé sur un thème donné.

Le texte qui suit s'appuie sur la note parue dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993, qui définit les épreuves du CAPES externe de mathématiques.

La première épreuve orale dure 45 minutes réparties en :

- 25 minutes pour l'exposé, le candidat gère son temps et sa présentation comme il l'entend, le jury n'intervenant pas sur le contenu, et n'interrompant en aucune manière le candidat, sauf éventuellement en cas de problème pratique.
- 20 minutes d'entretien avec la commission.

Les candidats tirent au sort deux thèmes d'exposé et en choisissent un. Ils disposent de deux heures pour préparer l'épreuve. Ils ne disposent d'aucun document autre que les programmes et les instructions relatives au concours.

Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils utilisaient l'un des deux modèles disponibles[4]**.** Ils peuvent utiliser des transparents ; le jury ne les fournissant pas, il leur est demandé d'apporter des transparents vierges, qui seront dûment identifiés comme tels avant emploi ; les transparents utilisés sont retenus par le jury. Le nombre est limité à *trois* transparents pendant l'épreuve.

Le programme de cette épreuve (cf. B.O. spécial n° 8 du 24 mai 2001 et partie I.2 de ce rapport) est extrait du programme de l'écrit du concours.

Les candidats peuvent faire appel à l'intégralité du programme complémentaire (titre B) au cours de cette épreuve, que ce soit pendant leur exposé ou pendant l'entretien avec le jury. Cependant, aucun thème proposé ne peut porter sur les paragraphes extraits du programme complémentaire complétant le programme de cette épreuve, ni a fortiori sur d'autres points du programme complémentaire. Pendant l'entretien, le jury a toute latitude pour interroger le candidat sur les programmes de l'enseignement secondaire. Toute notion abordée par le candidat peut aussi faire l'objet de questions : il est attendu d'un futur enseignant qu'il ne présente à ses élèves que des notions dont il peut parler de manière un tant soit peu construite; par conséquent, *une ouverture sur un point hors du programme de cette épreuve n'est susceptible de valoriser la prestation du candidat que si elle repose sur des connaissances suffisamment cohérentes, et si elle s'inscrit de manière logique comme un prolongement acceptable devant une classe du sujet traité*.

Les thèmes d'exposé proposés forment un ensemble couvrant le programme dans son intégralité et les couplages sont conçus de manière à proposer un vrai choix au candidat, deux thèmes jugés trop proches étant normalement écartés.

L'organisation actuelle du concours ne permet pas l'évaluation des compétences des candidats en matière de TICE au sens ou il n'y a pas d'épreuve devant ordinateur. Cette dimension de l'enseignement est abordée à travers l'usage de calculatrices rétroprojetables, dont la

[3] Il n'est pas attendu de la part des candidats une connaissance détaillée, excessivement précise des programmes en vigueur ; néanmoins, les confusions ou lacunes les plus grossières sont considérées comme des points négatifs et sont relevées.

[4] Pour la session 2007, un troisième modèle sera offert ; voir l'annexe relative aux calculatrices.

puissance permet d'aborder l'usage élémentaire de tableurs, ainsi que de logiciels de géométrie.
Pour une partie, de plus en plus importante, des sujets, l'illustration de telle ou telle propriété sur une calculatrice est expressément conseillée dans l'intitulé du sujet. Il est vivement conseillé aux candidats de prendre en compte ce conseil.

5.5 Deuxième épreuve : épreuve sur dossier. Choix d'exercices sur un thème donné.

Cette épreuve se déroulait sous la forme correspondant à la note parue dans le B.O. n°1 du 1er janvier 2004.

L'épreuve sur dossier dure au maximum 45 minutes. Le temps est réparti de la façon suivante :

- Pendant 25 minutes au maximum le candidat expose les réponses aux questions contenues dans le dossier, et notamment son choix d'exercice (objectifs, illustration du thème,…), puis ;
- Pendant 20 minutes au minimum un entretien s'instaure, entre la commission et le candidat, au cours duquel le candidat sera amené à résoudre, entièrement ou en partie, au moins un exercice choisi par la commission parmi l'exercice proposé par le jury et les exercices proposés par le candidat.

Les remarques concernant les TICE sont identiques à celles données pour la première épreuve orale (voir partie 5.4 ci-dessus). Les candidats ne sont pas autorisés à utiliser leur calculatrice personnelle. Ils empruntent l'un des modèles disponibles.

Il y a cependant une différence importante entre les deux épreuves. En effet, les tâches que le candidat doit accomplir pendant sa préparation, ainsi que pendant l'épreuve proprement dite, incluent pour une partie appréciable des dossiers des tâches devant *explicitement* être réalisées sur calculatrice. Il est bien évident que le non-respect de cette consigne se traduit de manière forte dans la notation de l'épreuve.
Les candidats peuvent utiliser des transparents ; le jury ne les fournissant pas, il leur est demandé d'apporter des transparents vierges, qui seront dûment identifiés comme tels avant emploi ; les transparents utilisés sont retenus par le jury. Le nombre est limité à *trois* transparents pendant l'épreuve

L'épreuve sur dossier se place au niveau de l'enseignement secondaire (cf. B.O. n°21 du 26 mai 1994). Il n'y a aucune extension de programme dans ce cas.

Chaque dossier fait référence à un thème, dont l'intitulé plus ou moins long (le contenu correspondant étant plus ou moins large) figure dans l'en-tête du dossier.
Il est essentiel pour le candidat d'interpréter de manière très précise cet intitulé ; notamment, le ou les exercices qu'il adjoint à celui proposé par le jury doivent constituer des illustrations de ce thème tel qu'il est défini, dans toute son ampleur. Ce point est développé dans la partie III.3.2 , analyse de la deuxième épreuve orale).

Les candidats ont deux heures pour préparer l'épreuve et peuvent utiliser les ouvrages imprimés disponibles dans le commerce, vierges de toute annotation manuscrite. Ils peuvent les apporter ou en emprunter à la bibliothèque du concours. Le jury peut s'opposer à l'utilisation de certains ouvrages s'il juge que cela risque de dénaturer l'épreuve (cf. B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993).

.La bibliothèque possède un certain nombre de manuels usuels, et pour quelques éditions un assez grand nombre, mais la fourniture d'un ouvrage déterminé ne peut en aucun cas être garantie. C'est pourquoi nous rappelons ici aux candidats qu'ils ont le droit d'utiliser leurs propres manuels.
Afin que tous les candidats puissent disposer d'un réel choix leur emprunt est limité en nombre à cinq ouvrages au plus.

5.6 Commentaires sur l'utilisation de la calculatrice

L'évolution constatée cette année a poursuivi celle constatée lors des années antérieures, et est une conséquence des efforts fournis par le jury aussi bien que par les préparateurs et les candidats. Cette évolution vers la prise en compte plus importante des TICE dans le concours est rendue possible par la générosité des deux constructeurs présents Texas Instruments, Casio, qui prêtent gracieusement du matériel en quantité suffisante.[5]

L'appréciation par le jury de l'usage des calculatrices –avec ou sans rétroprojection – met en évidence que si, parfois, cet usage apporte peu à la prestation du candidat (il s'agit par exemple de l'usage de la calculatrice à de simples fins opératoires), les utilisations à but pédagogique pertinent et les démonstrations brillantes deviennent nettement plus nombreuses d'année en année. De plus, la suppression du choix du dossier de seconde épreuve orale, qui oblige les candidats à traiter un sujet pouvant comporter une partie explicite utilisant les TICE, a nettement fait sentir ses effets.

Il est de notre devoir de rappeler ici que l'enseignement des mathématiques au collège ou au lycée implique de manière très explicite l'utilisation des TICE. Tous les commentaires des programmes y font référence de manière détaillée. Et, dans le corps des programmes de plusieurs classes, on trouve des indications encore plus précises, notamment pour les classes de quatrième, de première et terminale L, de première et terminale STG, de première et terminale S. *Il n'est plus acceptable de voir encore certains candidats, ayant pourtant suivi des préparations dans des centres officiels, ignorer ce fait et ignorer que pendant le concours il leur sera demandé de montrer leur capacité à mettre en œuvre les programmes tels qu'ils sont actuellement écrits*.

Les candidats et futurs candidats au CAPES externe de mathématiques doivent prendre en compte le fait que, pour le moment, l'aptitude à utiliser les TICE n'y est évaluée qu'à travers l'usage des calculatrices scientifiques. Les modèles admis au concours contiennent tous les fonctions attendues dans les programmes : tableur et logiciel de géométrie ; ils contiennent aussi des fonctions de calcul formel. Il en sera évidemment de même au concours 2007 avec le retour d'une troisième firme. Le jury a rédigé un document[6] précisant les attentes en matière de manipulation des modèles proposés. Il est vivement conseillé aux candidats, après avoir choisi le modèle qu'ils utiliseront, de prendre le temps d'étudier le document correspondant tout en se familiarisant avec l'utilisation de la calculatrice.

Les conditions de rétroprojection dépendent des salles, mais chaque commission a fait de son mieux pour installer les appareils de manière à pouvoir évaluer convenablement les prestations des candidats sur ce point, en faisant naturellement abstraction de la qualité technique de la projection.

[5] Pour la session 2007, nous aurons le plaisir de retrouver l'assistance de la firme Hewlett-Packard. Cf infra.
[6] Ce document est en ligne sur le site du jury ; il est présenté sous une forme adaptée pour chaque modèle.

II ENONCES ET ANALYSE DES EPREUVES ECRITES

1. Enoncé de la première épreuve

1 Présentation du jeu.

1.1 Les règles du jeu.

Le « tournoi »est un jeu comportant une suite de manches (appelées « duels ») opposant deux joueurs, jamais plus. Les joueurs vont entrer en jeu successivement, tant qu'aucun d'entre eux n'aura été déclaré vainqueur, et forment ainsi une suite $(J_0, J_1, \ldots)$ aussi longue qu'il faudra, ce qui nous conduit à considérer une suite infinie de joueurs notée $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Le premier duel oppose J_0 et J_1, le vainqueur reste en jeu et se voit opposer J_2 qui entre pour le deuxième duel. Plus généralement, le n-ième duel ($n \geqslant 2$) oppose le joueur J_n, qui entre alors en jeu, au vainqueur du duel précédent, le perdant quittant le jeu.
On convient enfin que le premier joueur qui remporte N duels, nécessairement consécutifs, est déclaré vainqueur et que le jeu prend fin. N est un entier fixé à l'avance, au moins égal à 2, et valable pour tout le déroulement du tournoi.
Le but de ce problème est de rendre compte de ce type de jeu en en proposant diverses modélisations probabilistes. On s'intéressera ainsi plus particulièrement à la durée du jeu, c'est-à-dire au nombre de duels ayant eu lieu avant la proclamation du vainqueur.

1.2 Les règles communes aux différentes modélisations aléatoires.

La succession des duels en parfaitement décrite si on connait, pour chacun, les numéros des participants et le numéro du gagnant, cela tant que le jeu continue, c'est-à-dire tant qu'aucun des joueurs n'a été déclaré vainqueur. On supposera que chaque duel est un jeu de hasard, on considèrera ainsi le n-ième duel comme un épreuve aléatoire $\mathcal{E}_n$, dont on observera les résultats possibles.
On présupposera, sans chercher à l'expliciter, l'existence d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ permettant de modéliser le jeu et on s'attachera à décrire l'univers des possibles, c'est à dire les issues des différentes épreuves, ainsi que la manière dont on affecte des probabilités aux résultats observés. Les modèles proposés devront respecter les règles suivantes :

1. Le premier duel : la probabilité que le résultat de $\mathbb{E}_1$ soit 1 (J_1 est le gagnant du premier duel) est p, où p est un élément de $]0,1[$ fixé dans tout le problème, le résultat étant 0 avec la probabilité $(1-p)$.
2. Les duels successifs :
   (a) Pour $n \geqslant 2$, l'épreuve $\mathcal{E}_n$, si elle a lieu, ne depend de celles qui l'on précédées que par le numéro du joueur opposé à J_n (celui qui a remporté le duel précédent).
   (b) La probabilité pour J_n de remporter ce duel (le résultat est n) est égale à p_n, où $(p_k)_{k\geqslant 2}$ est une suite d'éléments de $]0,1[$, le joueur qui lui est opposé étant vainqueur avec une probabilité $1-p_n$.

On admettra par ailleurs que, pour toute suite $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements disjoints et dont la réunion est de probabilité 1, il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P[X = n] = P(\mathcal{A}_n)$$

2 Préliminaires.

On se propose ici de démontrer divers résultats qui pourront être utilisés dans la suite du problème.

2.1 Résultat 1.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à termes positifs vérifiant :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n$$

1. Justifier, pour tout ε strictement positif, l'existence d'un entier naturel non nul n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0 on ait :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} x_k - \sum_{k=0}^{n} y_k\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0-1} (x_k - y_k)\right| + \varepsilon \sum_{k=n_0}^{n} x_k$$

2. En déduire que, si la série de terme général x_n est divergente, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} y_k$$

2.2 Résultat 2.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs telle que la série de terme général u_n soit convergente.
1.a. Montrer qu'on définit une suite de réels par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Quelle est la nature de cette suite ?
1.b. Justifier pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} k u_k = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - n v_n$$

1.c. Montrer que si la série de terme général v_n est convergente, alors la série de terme général nu_n est convergente.
1.d. Montrer que si la série de terme général nu_n est convergente alors la suite de terme général nv_n converge vers 0.
Indication : On pourra éventuellement, après l'avoir justifiée, utiliser la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n-1} = \sum_{k\geqslant n} (v_{k-1} - v_k)$$

pour majorer l'expression nv_{n-1}, lorsque n est un entier naturel non nul.
1.e. En déduire que les séries de termes généraux respectifs nu_n et v_n sont simultanément convergentes et de même somme.

2. Dans cette question, X désigne une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$. Déduire de ce qui précède qu'elle admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P[X > n]$ est convergente et qu'on a alors l'égalité :

$$E[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} P[X > n]$$

2.3 Résultat 3.

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à termes positifs telle que la série entière $\sum a_n x^n$ admette un rayon de convergence R strictement positif. On note :

$$\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$$

1. Montrer que $f(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers R sur $[0, R[$ si et seulement si f est majorée sur $[0, R[$.
On suppose dans la suite de cette partie que l'une de ces conditions équivalentes est réalisée et on note L la limite.
2.a. Montrer que, pour tout n entier naturel :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k R^k \leqslant L$$

2.b. En déduire que la série de terme général $a_n R^n$ est convergente.
2.c. Montrer que la série entière est normalement convergente sur $[-R, R]$. En déduire que :

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n = \lim_{x\to R^-} f(x)$$

3 Première modélisation : le cas particulier $N = 2$.

Dans cette section on observe la suite des numéros des différents vainqueurs successifs. L'univers des possibles est alors l'ensemble des listes (éventuellement infinies) représentant les numéros des joueurs vainqueurs aux différents combats. Ainsi : $(0, 2, 3, 3)$ représentera un jeu de 4 combats remportés successivement par J_0, J_2, J_3 et J_3 qui est alors déclaré gagnant du tournoi, ce qui met fin à celui-ci. On note D_n, pour n au moins égal à 2, l'événement : « le jeu s'arrête à l'issue du n-ième duel≫.
1.a. Expliciter D_2 à l'aide de la modélisation proposée.
1.b. Plus généralement, expliciter D_{n+1} lorsque n est un entier au moins égal à 2.
2. Dans cette question on suppose que, pour tout $n \geqslant 2$, p_n est égal à p.
2.a. Calculer $P(D_n)$ pour n supérieur ou égal à 2. Vérifier que $\bigcup_{n\geqslant 2} D_n$ est un événement de probabilité 1. Interpréter ce résultat.
2.b. On peut alors considérer une variable aléatoire T égale au nombre de duels qui ont effectivement eu lieu lorsque le jeu s'arrête. Calculer, après avoir justifié leurs existences, son espérance et sa variance.
3. On revient au cas général où, pour tout i au moins égal à 2, p_i est un réel élément de $]0, 1[$. On pose pour tout n au moins égal à 2 :

$$\beta_n = \prod_{i=2}^{n} p_i$$

Exprimer, pour n au moins égal à 2, $\sum_{k=2}^{n} P(D_k)$ en fonction de la suite $(\beta_k)_{k\geqslant 2}$. En déduire que $\bigcup_{n\geqslant 2} D_n$ est un événement de probabilité 1 si et seulement si β_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Lorsque cette condition est vérifiée on définira T comme à la question 2.b. et on posera, pour $n \geqslant 2$:

$$u_n = \beta_n - \beta_{n+1}$$

Jusqu'à la fin de cette section 3. on suppose qu'il existe un réel α strictement positif tel que, pour tout i au moins égal à 2, l'égalité suivante soit vérifiée :

$$p_i = 1 - \frac{1}{i^\alpha}$$

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\bigcup_{n\geqslant 2} D_n$ soit un événement de probabilité 1.
Indication : on pourra s'intéresser à la suite de terme général $-\ln(\beta_n)$.
5. Dans cette question, α est égal à 1. Donner une loi de T. T admet-elle une espérance ?
6. Dans cette question on suppose : $0 < \alpha < 1$.
6.a. Justifier l'équivalence lorsque n tend vers l'infini :

$$\sum_{k=2}^{n} (-\ln(p_k)) \sim \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

6.b. Après avoir justifié pour tout entier k au moins égal à 2 l'inégalité :

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha} dx \leqslant \frac{1}{(k-1)^\alpha}$$

démontrer l'équivalence lorsque n tend vers l'infini :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

6.c. En déduire que, pour tout c réel strictement positif, la suite de terme général $\ln(n^c u_n)$ tend vers $-\infty$ puis que la série de terme général nu_n est convergente.
Que peut-on en conclure pour l'espérance de T ?

4 Deuxième modélisation : le cas où les probabilités sont constantes.

Dans cette section et jusqu'à la fin du problème N est un entier supérieur ou égal à 3 et on suppose, pour tout n supérieur ou égal à 2 : $p_n = p$. On notera : $q = 1 - p$.
Pour tout n entier naturel, on note A_n l'événement « le joueur J_n participe à au moins un duel »et G_n l'événement « le joueur J_n est vainqueur du tournoi ».

4.1 Cas particulier : $N = 3$ et $p = 1/2$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(G_n) = \frac{1}{8} P(A_n)$$

2. Montrer que les événements A_0, A_1, A_2 et A_3 sont des événements certains.
3.a. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 4. On introduit les événements $A_{n,k}$ « le n-ième duel a lieu et oppose J_n et J_{n-k} ». Montrer que la probabilité de $A_{n,k}$ est nulle si k est différent de 1 ou de 2.
En déduire alors pour $n \geqslant 4$:

$$P(A_n) = \frac{1}{2}P(A_{n-1}) + \frac{1}{4}P(A_{n-2})$$

3.b. On désigne par r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$) les deux racines de l'équation :

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{4}$$

Vérifier que, pour $n \geqslant 2$, on a :

$$P(A_n) = \frac{4}{\sqrt{5}}[r_2^n - r_1^n]$$

3.c. En déduire que la probabilité que le jeu s'arrête est égale à 1. On pourra alors considérer une variable aléatoire T égale au nombre de duels qui ont effectivement eu lieu lorsque le jeu s'arrête.
Calculer : $P[T = 3]$.
Montrer que, pour $n \geqslant 4$:

$$P[T = n] = P[G_{n-2}]$$

En déduire une expression de $P[T = n]$ pour $n \geqslant 4$ puis l'espérance de T.
Indication : Pour 4.1.3.b. et 4.1.3.c. il pourra être intéressant de mener formellement dans un premier temps les calculs en fonction de r_1 et de r_2 et d'utiliser ensuite leur somme et leur produit.

4.2 Etude du cas général.

On revient au cas général : $N \geqslant 3$ et p est élément de $]0,1[$. On posera de plus, pour tout n entier naturel :

$$a_n = P(A_n) \text{ et } g_n = P(G_n)$$

1.a. Calculer g_0. Que vaut a_k pour $0 \leqslant k \leqslant N$?
1.b. Montrer que la série de terme général g_n est convergente.
1.c. Justifier, pour tout n non nul, la relation :

$$g_n = p(1-p)^{N-1}a_n$$

En déduire que la série de terme général a_n est convergente. On posera :

$$S = \sum_{n \geqslant 1} a_n$$

2.a. En considérant à nouveau les événements $A_{n,k}$ définis dans la partie précédente, justifier, pour n strictement supérieur à N, la relation :

$$a_n = \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1}a_{n-k}$$

Exprimer a_{N+1} en fonction de p et de N.
2.b. En sommant les égalités précédentes, montrer l'égalité :

$$(1-p)^{N-1}S = \sum_{n=1}^{N} a_n - \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{i=k}^{N-1} p(1-p)^{k-1}a_{N-i}$$

En utilisant une interversion d'indice dans la somme double, puis la question 1.a. calculer S.
En déduire la somme de la série de terme général g_n, puis que la probabilité que le jeu se termine est égale à 1.
3. On notera T une variable aléatoire égale au nombre de duels ayant eu lieu jusqu'à l'arrêt du jeu.
3.a. Exprimer a_n et g_n en fonction de T.
3.b. En utilisant le résultat 2 des préliminaires montrer que T admet une espérance et donner l'expression de $E[T]$ en fonction de p et de N. Retrouver le résultat relatif à $E[T]$ de la question 4.1.3.c.
La formule obtenue vaut aussi pour $N = 2$; retrouver ainsi le résultat de la question 3.2.b.
Déterminer l'espérance de T pour N quelconque et $p = 1/2$.
3.c. Démontrer, pour $n \geqslant N+1$:

$$(\mathcal{R})\ a_n - a_{n+1} = p(1-p)^{N-1}a_{n-N+1}$$

5 Comportement asymptotique de la loi de T.

5.1 Un lemme.

Démontrer que, pour tout entier naturel r non nul et toute famille $(z_1,\ldots,z_r)$ de complexes non nuls, l'égalité :

$$\left|\sum_{k=1}^{r} z_k\right| = \sum_{k=1}^{r} |z_k|$$

n'est réalisée que lorsque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, (2 \leqslant k \leqslant r) \Rightarrow (\exists \lambda_k \in]0,+\infty[, z_k = \lambda_k z_1)$$

5.2 Etude d'une fonction associée à T.

1. Montrer qu'on peut définir une fonction Q par :

$$\forall x \in [-1,1], Q(x) = \sum_{n \geqslant 0} P[T > n]x^n$$

Vérifier qu'elle est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.
2. En utilisant la relation $(\mathcal{R})$ et en s'inspirant des techniques de calcul mises en oeuvre à la question 2.b. de la section 4.2, démontrer, pour tout x de $[-1,1]$, la formule :

$$\left(1 - x + \frac{p}{1-p}(x(1-p))^N\right) Q(x) = 1 - (x(1-p))^N$$

3. Vérifier que les deux polynômes :

$$1 - X + \frac{p}{1-p}(X(1-p))^N \text{ et } 1 - (X(1-p))^N$$

admettent dans $\mathbb{C}$ une seule racine commune et que celle-ci est simple et réelle. En déduire la relation :

$$Q(x) = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{pB(x)} \text{ avec } B(x) = \sum_{k=1}^{N-1} p(1-p)^{k-1}x^k - 1$$

5.3 Etude des racines de B.

1. Etudier les variations de B sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $B(1)$. En déduire que B admet une unique racine réelle positive ρ_N élément de $]1,+\infty[$ et que cette racine est simple.
2. En utilisant le lemme, montrer que les racines complexes de B sont de module strictement supérieur à ρ_N.
3. D'après ce qui précède, les pôles de Q sont en particulier de module strictement supérieur à 1. Aurait-on pu prévoir directement ce résultat ?

5.4 Recherche d'équivalent.

On note $\{z_1,\ldots,z_m\}$ les racines de B dans $\mathbb{C}$ de multiplicités respectives ν_k.
1. Justifier l'existence d'une famille de complexes non nuls telle que, pour tout complexe z de module inférieur ou égal à 1 on ait :

$$\frac{1}{B(z)} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{\nu_k} \frac{\lambda_{k,s}}{(z-z_k)^s}$$

2. Dans cette question s et k sont fixés et z désigne un complexe de module inférieur ou égal à 1.
2.a. Justifier l'égalité :

$$\frac{1}{(z_k-z)^s} = \sum_{n\geqslant 0} C_{n+s-1}^{s-1}\frac{z^n}{z_k^{n+s}}$$

2.b. En déduire, pour tout k, l'existence d'un polynôme P_k de degré inférieur ou égal à $\nu_k - 1$ tel que :

$$\sum_{s=1}^{\nu_k} \frac{\lambda_{k,s}}{(z-z_k)^s} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{P_k(n)}{z_k^n}\right) z^n$$

2.c. En déduire une expression de a_{n+1} pour $n \geqslant 1$.
3.a. Montrer, à l'aide des questions précédentes, l'existence d'un réel K tel qu'on ait :

$$a_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{{\rho_N}^n}$$

3.b. Donner une expression de K en fonction de p, B et ρ_N. En déduire un équivalent à l'infini de $P[T=n]$.

2. Analyse de la première épreuve

Contenu de l'épreuve.

Le sujet de cette année proposait l'étude probabiliste d'un jeu comportant une succession de duels opposant à chaque fois deux joueurs suivant des règles précises. On s'intéressait plus particulièrement au nombre de duels nécessaires à la proclamation d'un vainqueur. Différentes modélisations étaient proposées dans des cadres simples avant de passer à un cas plus général afin d'établir l'espérance de la durée du jeu. On s'efforçait enfin d'obtenir des renseignements sur le comportement asymptotique de la loi de la variable aléatoire représentant la durée du jeu. Pour ce faire, la partie préliminaire se proposait d'établir différents résultats sur les suites et les séries, ainsi que sur le comportement de la somme d'une série entière. Ces propriétés étaient ensuite utilisées sous leur version probabiliste à propos des calculs d'espérance ou de la définition des fonctions génératrices comme sommes de séries entières.

Commentaires généraux.

Rappelons que résoudre un énoncé mathématique consiste non seulement à trouver des résultats corrects, mais aussi à justifier précisément les démarche et raisonnement permettant d'y parvenir. Plus encore, il s'agit avant toutes choses de vérifier l'existence des objets sur lesquels on travaille : trop de candidats semblent penser que toute suite admet une limite et que le seul problème est de l'identifier ou pensent que la somme d'une série (dont on ne peut parler sans en avoir prouvé l'existence) a effectivement les propriétés d'une somme finie. La préparation d'une épreuve de Mathématiques doit donc nécessairement commencer par un apprentissage précis des définitions et des théorèmes en les replaçant dans les contextes de structures où elles ont effectivement un sens. Par ailleurs, lorsqu'il s'agit de notions délicates d'analyse (et la notion de limite en est une), il est important de ne pas se contenter d'idées approximatives ou simplistes (par exemple en pensant uniquement en termes de suites monotones, voire même en ne faisant référence qu'aux suites usuelles), il serait bon d'avoir à l'esprit quelques exemples ou contre-exemples simples ce qui éviterait sans doute de grosses erreurs (citons la série de terme général 1/n pour éviter de dire que si une suite tend vers 0 la série associée converge...).

On peut regretter que des définitions fondamentales ne soient pas connues comme par exemple l'équivalence de deux suites ou la convergence normale d'une série de fonctions sur un intervalle. En probabilités, les notions restent souvent trop vagues et on trouve rarement la justification des calculs faits (sommes ou multiplications de probabilités). Dans les différents domaines, l'évocation complète et motivée des théorèmes utilisés n'est pas la pratique systématique qu'on pourrait attendre. On apprécie d'autant plus les copies présentant un exposé clair et rigoureux assorti à une rédaction soignée : il faut naturellement se réjouir de la présence à ce concours d'excellents candidats !

Comme chaque année, on constate que les candidats obtenant des notes satisfaisantes sont ceux qui ont traité en profondeur un nombre raisonnable de questions. Il n'est pas indispensable d'aborder toutes les parties du problème : on risque alors de se disperser à la recherche de petits résultats intermédiaires, ce qui nuit à la compréhension de la démarche inhérente à l'énoncé. Cette stratégie ne permet pas la plupart du temps d'engranger un nombre de points significatif.

Etude détaillée de quelques questions.

Partie 2.

Dans toute cette partie, la positivité des suites était essentielle. Elle était utilisée en particulier pour obtenir, par sommation, des suites croissantes, l'argument essentiel étant alors que si une suite est croissante, elle converge si et seulement si elle est majorée.

2.1 Les suites étant positives (et non strictement positives) il fallait avoir recours à la définition générale de l'équivalence :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n - vn = o(|u_n|)$$

On a trouvé ici beaucoup d'erreurs dans la définition de l'équivalence ou même dans les calculs sur les valeurs absolues.

2.2 Pour ce résultat classique, on proposait une suite de questions intermédiaires puis une question récapitulative qui prouvait en particulier que les deux séries étaient simultanément convergentes. On attendait pour ce faire une démarche claire de raisonnement dépassant la simple formule « d'après ce qui précède ». Pour les questions intermédiaires la référence aux suites croissantes rappelée plus haut n'a pas toujours été claire, les candidats ayant souvent confondus les inégalités sur les sommes partielles avec des inégalités sur les termes généraux des séries. Les différents résultats liant les propriétés des suites et des séries ne sont pas toujours bien utilisés.
L'énoncé comportait une indication proposant, par exemple, des méthodes de calcul dites de « télescopage des termes ». Certains candidats lui ont préféré la stratégie des « ... » : rappelons qu'il est dangereux d'évoquer ainsi une somme infinie, ou un nombre infini de sommes finies. Il ne faut pas oublier dans tous ces problèmes que la justification de ces manipulations se trouve dans la structure d'espace vectoriel des suites convergentes.
L'application à l'espérance devait comporter une définition précise de celle-ci (en particulier de son existence). Ici la variable aléatoire était à valeurs positives, rappelons que dans le cas général il faut évoquer la convergence absolue de la série. On devait ensuite définir clairement quelles étaient les suites auxquelles on appliquait les résultats précédents : peu de candidats ont pensé à justifier la convergence de la série de terme général $P[X = n]$.

2.3 Un nombre non négligeable de candidats n'ont pas bien vu les problèmes d'existence des différentes limites en jeu ce qui les a conduit à de grosses erreurs de logique dans la démarche. L'étude du comportement en R de la somme d'une série entière est certes délicat, mais la suite détaillée des questions aurait pu permettre aux candidats de prendre conscience du problème.

Partie 3.

3.1, 3.2, 3.3 Dans cette partie le joueur remportant deux jeux successifs était déclaré gagnant. L'énoncé proposait de modéliser le jeu par la suite finie des numéros des candidats gagnants chaque duel. On aurait souhaité que les candidats utilisent cette modélisation pour décrire les différents événements. Certains ont représenté le jeu par un arbre pondéré ce qui a conduit un grand nombre d'entre-eux à un résultat correct pour la probabilité de l'événement D_n. D'autres ont cherché à retrouver des méthodes de dénombrement présupposant ainsi un contexte d'équiprobabilité inadapté dans ce cas. Un nombre substantiel de candidats est parvenu au résultat

correct sans justifier toutefois les sommes de probabilités (événements disjoints) ou les calculs de produit liés aux règles du jeu énoncées, en particulier la règle (2.a) :
« Pour $n \geqslant 2$, l'épreuve $\mathcal{E}_n$, si elle a lieu, ne depend de celles qui l'on précédées que par le numéro du joueur opposé à J_n (celui qui a remporté le duel précédent). »
La justification théorique aurait pu être la suivante : pour tout i entier naturel non nul, on note, lorsque $\mathcal{E}_i$ a lieu, X_i la variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 avec la probabilité p_i si c'est le candidat entrant qui gagne et 0 sinon. Cette règle implique que, si le jeu ne s'est pas arrêté avant le duel de numéro n, les variables aléatoires $(X_1, \dots X_n)$ existent et sont indépendantes. Il est alors simple de traduire D_n à l'aide de ces variables aléatoires, leur indépendance permettant de justifier les calculs effectués (en particulier les produits de probabilités).
Un certain nombre de candidats ont mené à bien les calculs d'espérance et de variance, les propriétés des séries géométriques étant correctement utilisées.

3.4,3.5,3.6 Il s'agissait dans ce contexte probabiliste de réinvestir des notions d'équivalence sur les suites et des résultats de convergence pour les séries de Riemann.

Partie 4.

4.1 Le problème de la participation des joueurs a souvent été bien compris. On a vu des maladresses concernant la suite récurrente linéaire double : on pouvait tout à fait choisir une démonstration par récurrence mais il ne fallait pas oublier d'initialiser les deux premiers termes (rang 2 et 3).

4.2 Seule la question 1 a été largement abordée.

Partie 5.

Cette partie n'a été que très rarement valablement abordée.

3. Enoncé de la deuxième épreuve

Définitions et notations

On considère un espace affine euclidien orienté $\mathcal{E}$ de dimension 3, de direction E, muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Le sous-espace affine de $\mathcal{E}$ d'équation $(z = 0)$ sera noté $\mathcal{P}$, et sa direction P. Par abus d'écriture, à partir de la partie III, le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de $\mathcal{P}$ sera également noté $\mathcal{R}_0$.

Si $\mathcal{R}$ est un repère d'un espace affine $\mathcal{X}$ de dimension quelconque n et si M est un point de $\mathcal{X}$, nous noterons $M(x_1,\ldots,x_n)_{\mathcal{R}}$ pour signifier que $x_1,\ldots,x_n$ sont les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}$.

La partie de $\mathcal{P}$ formée des points à coordonnées entières est notée $\mathcal{Z}$:

$$M(x,y)_{\mathcal{R}_0} \in \mathcal{Z} \text{ si et seulement si } (x,y) \in \mathbb{Z}^2.$$

Si A et B sont deux points de $\mathcal{E}$, nous noterons AB la distance de A à B, (AB) la droite passant par les points A et B (quand $A \neq B$) et $[A,B]$ le segment d'extrémités A et B.

On note $\mathcal{Q}$ la quadrique de $\mathcal{E}$ d'équation :

$$(\mathcal{Q}) \qquad x^2 - 3xy + y^2 + x - y - \frac{1}{2}z^2 + \frac{\sqrt{10}}{5}z = 0$$

et $\mathcal{C}$ la conique intersection de $\mathcal{Q}$ et du plan $\mathcal{P}$:

$$(\mathcal{C}) \qquad \begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 + x - y = 0 \\ \\ z = 0 \end{cases} .$$

On note $GA(\mathcal{P})$ le groupe affine de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections affines de $\mathcal{P}$ sur lui-même : $GA(\mathcal{P})$ est un groupe pour la composition.

On note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices réelles carrées d'ordre 2. Le sous-groupe multiplicatif des éléments inversibles de cette algèbre est noté $GL_2(\mathbb{R})$.

Le but de ce problème est d'étudier l'équation diophantienne :

$$(\Sigma) \qquad n^2 - 3np + p^2 + n - p = 0,$$

c'est-à-dire de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des points de $\mathcal{C}$ à coordonnées entières : $\mathcal{S} = \mathcal{C} \cap \mathcal{Z}$.

La partie I présente une étude géométrique de la quadrique $\mathcal{Q}$ et de la conique $\mathcal{C}$; la partie II donne quelques méthodes arithmétiques d'étude de (Σ) ; la partie III introduit une famille de transformations affines qui permet, dans la partie IV, de décrire l'ensemble $\mathcal{S}$.

Les parties I et II sont indépendantes et la partie III est très largement indépendante des deux parties précédentes.

Partie I : étude de la quadrique $\mathcal{Q}$ et de la conique $\mathcal{C}$

I.1. Intersections de $\mathcal{Q}$ avec une famille de plans

On pose $\overrightarrow{u} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{k}$.

a) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{w}$ tel que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ soit une base orthonormale directe de E.

b) On pose $\mathcal{R}_1 = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. Soit M un point de $\mathcal{E}$; on le représente dans les deux repères par $M(x,y,z)_{\mathcal{R}_0} = M(x_1,y_1,z_1)_{\mathcal{R}_1}$. Exprimer x, y et z en fonction de x_1, y_1 et z_1, puis en déduire l'équation de $\mathcal{Q}$ dans le repère $\mathcal{R}_1$.

c) Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\mathcal{P}_t$ le plan d'équation $z_1 = t$ relativement au repère $\mathcal{R}_1$. Préciser la position de $\mathcal{P}_t$ dans $\mathcal{R}_0$ et en faire un croquis. Montrer que l'intersection de $\mathcal{P}_t$ et de $\mathcal{Q}$ est un cercle dont on précisera le centre C_t et le rayon R_t.

d) Préciser la valeur de t pour laquelle le cercle précédent se réduit à un point. Soit S ce point ; vérifier que $S\left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}\right)_{\mathcal{R}_0}$.

I.2. Nature de $\mathcal{Q}$ et de $\mathcal{C}$

Soit $\mathcal{R}$ le repère $(S, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$; on note (X,Y,Z) les coordonnées d'un point de $\mathcal{E}$ dans ce nouveau repère.

On note $\mathcal{P}'$ le plan admettant $\mathcal{R}' = (S, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ pour repère orthonormal.

a) Montrer que l'équation de $\mathcal{Q}$ dans le repère $\mathcal{R}$ est $X^2 + Y^2 = 5Z^2$.

b) Quelle est la nature de $\mathcal{Q}$? On remarquera en particulier que $\mathcal{Q}$ est une surface de révolution et on précisera son axe.

c) Montrer qu'un point $M(X,Y,Z)_{\mathcal{R}}$ est élément de $\mathcal{P}$ si et seulement si $Y = -\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Faire une figure, sur une feuille de papier millimétrée, représentant, dans le repère $\mathcal{R}'$, la droite d'intersection $\mathcal{D} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, ainsi que les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ formant $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}'$. On prendra une unité égale à 8cm.

Pour toute la fin de cette partie, cette figure sera un outil important. On y placera les éléments définis ci-dessous ou leurs projections sur $\mathcal{P}'$, au fur et à mesure qu'ils apparaîtront utiles.

Quelle est la nature de la conique $\mathcal{C}$?

d) Montrer qu'il existe deux cercles dans $\mathcal{P}'$, de même rayon et centrés sur l'axe $(S, \overrightarrow{w})$, tangents aux trois droites D, D_1 et D_2. On note Ω_1 et Ω_2 leurs centres respectifs, et on note ρ la valeur commune de leurs rayons.

e) On note $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ les sphères de centres respectifs Ω_1 et Ω_2, et de rayon ρ. Montrer que ces

sphères sont tangentes au plan $\mathcal{P}$ en deux points notés F_1 et F_2, et tangentes à $\mathcal{Q}$ le long de deux cercles que l'on note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Représenter sur la figure précédente les projections orthogonales sur $\mathcal{P}'$ de ces deux cercles, ainsi que les points F_1 et F_2.

I.3. Deux caractérisations de $\mathcal{C}$

a) Soit M un point quelconque de l'intersection $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$. Montrer que la droite (MS) est contenue dans $\mathcal{Q}$. On nomme T_1 et T_2 les intersections respectives de (MS) et des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Montrer que $MT_1 = MF_1$ et $MT_2 = MF_2$. Montrer par ailleurs que $|MT_1 - MT_2|$ est constant lorsque M décrit $\mathcal{C}$. Quelle propriété de $\mathcal{C}$ peut-on retrouver ainsi ?

b) Pour $i \in \{1,2\}$, on nomme Δ_i la droite d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan contenant le cercle $\mathcal{C}_i$, et U_i le centre de $\mathcal{C}_i$. Pour M point quelconque de l'intersection $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}$, soit H_i la projection orthogonale de M sur Δ_i. Vérifier que les points M, S, H_i, T_i et U_i sont coplanaires. En étudiant la figure formée par ces cinq points, prouver que le rapport $\dfrac{MH_i}{MT_i}$ reste constant quand M décrit $\mathcal{C}$. Quelle propriété de $\mathcal{C}$ peut-on retrouver ainsi ?

Partie II : résolution de l'équation diophantienne pour de petites valeurs de n

Pour n et p deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on note $\binom{n}{p}$ le coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

avec la convention $0! = 1$.

Pour n et p entiers naturels supérieurs ou égaux à 1, on s'intéresse, lorsqu'elle a un sens, à l'équation :

$$(\Sigma_1) \qquad \binom{n}{p-1} = \binom{n-1}{p}.$$

II.1. Une étude élémentaire

a) Montrer que cette équation est équivalente au système :

$$\begin{cases} 2 \leqslant p+1 \leqslant n, \\ n^2 + p^2 - 3np + n - p = 0. \end{cases}$$

b) Pour n entier supérieur ou égal à 1, montrer que le polynôme de variable X : $n^2 - 3nX + X^2 + n - X$ possède deux racines réelles, que l'on écrira sous la forme $X_1 = \dfrac{a_n - \sqrt{b_n}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{a_n + \sqrt{b_n}}{2}$ où a_n et b_n sont deux entiers naturels. Pour quelles valeurs de n a-t-on $2 \leqslant X_1 + 1 \leqslant n$? Et pour quelles valeurs de n a-t-on $2 \leqslant X_2 + 1 \leqslant n$?

c) Montrer que si b est un entier naturel, $\sqrt{b}$ est rationnel si et seulement si b est un carré parfait.

d) On suppose que (n,p) est une solution de (Σ_1). Montrer que $2 \leqslant n$, que $5n^2+2n+1$ est un carré parfait et donner une expression de p en fonction de n.

e) Réciproquement, soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que $5n^2+2n+1$ soit un carré parfait. Montrer qu'il existe un unique p tel que (n,p) soit solution de (Σ_1).

f) Pour n_0 entier naturel non nul, comment peut-on calculer tous les couples (n,p) solutions de (Σ_1) avec $1 \leqslant n \leqslant n_0$? On pourra donner un algorithme de calcul de ces solutions, sans utiliser un langage de programmation précis.

II.2 Une méthode plus arithmétique

Soit (n,p) une solution de (Σ_1).

a) On suppose que n et p sont premiers entre eux. Montrer que $np=(n-p)(n-p+1)$ et en déduire que n divise $p-1$. Quelles sont toutes les solutions de (Σ_1) formées d'entiers premiers entre eux ?

b) On ne suppose plus maintenant que n et p sont premiers entre eux : on note $r=n\wedge p$ leur plus grand commun diviseur commun et on pose $n=ru$ et $p=rv$. Montrer successivement :

• r divise $u-v$; • $r=u-v$; • $v=\dfrac{\sqrt{5r^2+4}-r}{2}$; • $r^2<\dfrac{2p}{\sqrt{5}-1}$.

c) Faire la liste de tous les couples (n,p) solutions de (Σ_1) pour $n \leqslant 105$.

Partie III : un groupe de transformations affines conservant $\mathcal{S}$.

Dans cette partie et la suivante, nous travaillons exclusivement dans le plan $\mathcal{P}$, dont le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$ est encore noté $\mathcal{R}_0$.

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et le repère $\mathcal{R}_1$ définis ci-dessous n'ont pas de rapport avec les éléments de mêmes noms définis dans la partie I.

III.1. Définition d'un nouveau repère $\mathcal{R}_1$ associé à la conique $\mathcal{C}$

a) Soit $I(-1/5,1/5)_{\mathcal{R}_0}$. On pose alors $x_1=x+\dfrac{1}{5}$ et $y_1=y-\dfrac{1}{5}$. Quelle est l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(I,\vec{i},\vec{j})$?

b) Mettre la forme quadratique a^2+b^2-3ab sous la forme d'un produit de formes linéaires. On pourra considérer a^2+b^2-3ab comme un trinôme d'inconnue b.

c) En déduire qu'il existe une base $(\vec{u},\vec{v})$ de P telle que :

– les relations entre les coordonnées (x,y) dans le repère $\mathcal{R}_0$ et les coordonnées (X,Y) dans le repère $\mathcal{R}_1 = (I, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soient de la forme :

$$\begin{cases} X = \alpha\left(x+\dfrac{1}{5}\right) - \left(y-\dfrac{1}{5}\right) \\ Y = \beta\left(x+\dfrac{1}{5}\right) + \left(y-\dfrac{1}{5}\right) \end{cases}$$

avec $\alpha+\beta > 0$;

– l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $(I, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ s'écrive : $5XY+1=0$.

Expliciter les valeurs de α et β, ainsi que les relations exprimant les anciennes coordonnées (x,y) en fonction des nouvelles coordonnées (X,Y).

d) Que sont les axes du nouveau repère $\mathcal{R}_1$ pour la conique $\mathcal{C}$?

III.2. Transformations affines conservant $\mathcal{C}$

Nous étudions dans ce paragraphe l'ensemble G_1 des éléments de $GA(\mathcal{P})$ qui conservent la conique $\mathcal{C}$:

$$G_1 = \{h \in GA(\mathcal{P}),\ h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}\}.$$

a) Montrer qu'un élément h de $GA(\mathcal{P})$ est élément de G_1 si et seulement si $h(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$.

b) Montrer que G_1 est un sous-groupe de $GA(\mathcal{P})$.

c) Soit $h \in GA(\mathcal{P})$. Montrer qu'il existe un et seul sextuplet (a,b,c,d,e,f) de réels tel que, pour tout point $M(X,Y)_{\mathcal{R}_1}$, l'image $M' = h(M)$ de M par h ait pour coordonnées, toujours dans le repère $\mathcal{R}_1$, $X' = aX+bY+c$ et $Y' = dX+eY+f$. Justifier que $ae-bd \neq 0$.

d) Montrer que si h est élément de G_1, le sextuplet (a,b,c,d,e,f) qui lui est associé vérifie les relations :

$$\begin{cases} ad = 0 \\ af+cd = 0 \\ 5cf-ae-bd = -1 \\ bf+ce = 0 \\ be = 0 \\ ae-bd \neq 0 \end{cases}$$

e) En déduire que G_1 est formé des transformations de la forme $M(X,Y)_{\mathcal{R}_1} \longmapsto M'(\mu X, Y/\mu)_{\mathcal{R}_1}$ et $M(X,Y)_{\mathcal{R}_1} \longmapsto M'(\mu Y, X/\mu)_{\mathcal{R}_1}$ où μ décrit $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Parmi ces transformations, lesquelles sont des symétries ?

f) On note G_1' la partie de $GL_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A \in G_1' \Longleftrightarrow \exists \mu \in \mathbb{R}^*,\ A = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1/\mu \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1/\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que G_1' est un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$ pour le produit matriciel et que l'application qui à toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ de G_1' associe la transformation affine $M(X,Y)_{\mathcal{R}_1} \longmapsto M'(aX + bY, dX + eY)_{\mathcal{R}_1}$ est un isomorphisme de G_1' sur G_1.

III.3. Transformations affines conservant $\mathcal{Z}$

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'ensemble G_2 des éléments de $GA(\mathcal{P})$ qui conservent les points à coordonnées entières :

$$G_2 = \{h \in GA(\mathcal{P}),\ h(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}\}.$$

a) Un élément quelconque $h \in GA(\mathcal{P})$ vérifiant $h(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$ est-il nécessairement élément de G_2 ?

b) Montrer que G_2 est un sous-groupe de $GA(\mathcal{P})$.

c) Montrer que les éléments de G_2 sont exactement les applications de la forme

$$M(x,y)_{\mathcal{R}_0} \longmapsto M'(ax+by+c, dx+ey+f)_{\mathcal{R}_0}$$

où $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{Z}^6$ avec $|ae-bd| = 1$.

III.4. Le groupe Γ

a) Montrer qu'il existe deux points P_1 et P_2 tels que :
- $P_1 \neq O$, $P_2 \neq O$ et $P_1, P_2 \in \mathcal{S}$;
- P_1 est d'ordonnée nulle et P_2 est d'abscisse nulle.

Montrer qu'il existe deux transformations affines f_1 et f_2 telles que :
- $f_1(I) = I$, $f_1(O) = P_1$ et $f_1(P_1) = O$;
- $f_2(I) = I$, $f_2(O) = P_2$ et $f_2(P_2) = O$.

Si M est un point quelconque de $\mathcal{P}$, nous noterons respectivement (x,y) et (X,Y) les coordonnées de M dans les repères $\mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}_1$. De même, pour $i = 1$ et 2, nous noterons (x_i,y_i) et (X_i,Y_i) les coordonnées de $f_i(M)$ dans les repères $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_1$. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} M(x,y)_{\mathcal{R}_0} &= M(X,Y)_{\mathcal{R}_1} \\ f_1(M)(x_1,y_1)_{\mathcal{R}_0} &= f_1(M)(X_1,Y_1)_{\mathcal{R}_1} \\ f_2(M)(x_2,y_2)_{\mathcal{R}_0} &= f_2(M)(X_2,Y_2)_{\mathcal{R}_1} \end{aligned}$$

Exprimer x_1, y_1, x_2 et y_2 en fonction de x et y et démontrer les relations matricielles :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \dfrac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

où $\lambda = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}$. En déduire que f_1 et f_2 sont toutes deux des symétries appartenant à $G_1 \cap G_2$.

b) On s'intéresse maintenant au sous-groupe Γ de $GA(\mathcal{P})$ engendré par f_1 et f_2. Montrer que les éléments de Γ sont les éléments h de $GA(\mathcal{P})$ qui s'écrivent sous l'une des formes suivantes :

(i) $h = (f_1 \circ f_2)^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
(ii) $h = f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c) Montrer que Γ est isomorphe au sous-groupe Γ_1 de $GL_2(\mathbb{R})$ engendré par les matrices A_1 et A_2 :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \dfrac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A_1A_2 et en déduire :

$$\Gamma_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda^k & 0 \\ 0 & \lambda^{-k} \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-k} \\ \lambda^k & 0 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

En déduire que la décomposition obtenue au b) est unique, c'est-à-dire que chaque élément h de Γ correspond à un et un seul des deux cas (i) ou (ii) et que l'entier relatif k intervenant dans la décomposition de h est unique.

d) Soit H un groupe dont la loi est notée mutiplicativement : l'élément neutre de H sera donc noté 1. On suppose qu'il existe deux éléments a_1 et a_2 de H tels que $a_1^2 = a_2^2 = 1$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupe $\phi : \Gamma \to H$ tel que $\phi(f_1) = a_1$ et $\phi(f_2) = a_2$.

III.5. Utilisation de Γ pour engendrer une infinité de points de $\mathcal{S}$

a) Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par Γ, c'est-à-dire que pour tout élément h de Γ et pour tout élément M de $\mathcal{S}$, $h(M)$ est élément de $\mathcal{S}$.

Comme l'origine O de $\mathcal{R}_0$ est élément de $\mathcal{S}$, on en déduit donc que les points M_k et N_k définis pour $k \in \mathbb{Z}$ par :

$$\begin{cases} M_k = (f_1 \circ f_2)^k(O) \\ N_k = (f_2 \circ (f_1 \circ f_2)^k)(O) = f_2(M_k) \end{cases}$$

sont tous éléments de $\mathcal{S}$. Calculer M_1, M_2 et M_3 et comparer avec les résultats obtenus à la partie II.

b) Donner l'expression des coordonnées (x_k, y_k) de M_k dans le repère $\mathcal{R}_0$, en fonction de k et λ. Quelle transformation permet-elle d'obtenir M_{-k} à partir de M_k ?

c) Montrer que les applications :

$$\begin{cases} \phi_1 : \\ x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(1 + 3x - \sqrt{1 + 2x + 5x^2}\right) \\ \phi_2 : \\ x \longmapsto \dfrac{1}{2}\left(1 + 3x + \sqrt{1 + 2x + 5x^2}\right) \end{cases}$$

sont des bijections de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Quelles sont leurs applications réciproques ?

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les parties de $\mathcal{P}$ définies par :

$$\begin{cases} M(x,y)_{\mathcal{R}_0} \in \mathcal{C}_1 \Longleftrightarrow y = \phi_1(x) & , \\ M(x,y)_{\mathcal{R}_0} \in \mathcal{C}_2 \Longleftrightarrow y = \phi_2(x) & . \end{cases}$$

Montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ forment une partition de $\mathcal{C}$. Représenter rapidement les parties $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ainsi que les points M_{-1}, M_0, M_1, M_2, N_{-1}, N_0 et N_1.

d) Montrer que les applications f_1 et f_2 échangent les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, et donc que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont globalement invariantes par $f_1 \circ f_2$. Sur quelles parties de $\mathcal{C}$ les points M_k et N_k sont-ils situés ?

Partie IV : résolution de (Σ).

Soit $P(n,p)_{\mathcal{R}_0}$ un point de $\mathcal{S}$ distinct de O. Le but de cette partie partie est de démontrer que P est image de O par un élément h de Γ, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $P = M_k$ ou $P = N_k$.

IV.1. Premier cas : P est élément de $\mathcal{C}_1$ et $n > 0$

Soit la suite $(P_i)_{i\geqslant 0}$ définie par récurrence :

$$\begin{cases} P_0 = P \\ P_{i+1} = (f_1 \circ f_2)^{-1}(P_i) \quad \text{pour tout } i \geqslant 0 \end{cases}.$$

Pour tout i, on notera α_i et β_i les coordonnées de P_i dans le repère $\mathcal{R}_0$.

a) Montrer que l'on a, pour tout i de $\mathbb{N}$, $\alpha_{i+1} = \phi_2^{-1} \circ \phi_1(\alpha_i)$ et $\beta_i = \phi_1(\alpha_i)$.

b) Montrer que la suite $(\alpha_i)_{i\geqslant 0}$ est strictement décroissante et non minorée. En déduire qu'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $\alpha_k \leqslant 0 < \alpha_{k-1}$.

c) Montrer que $\alpha_k = 0$ puis que $P = M_k$.

d) Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (Σ_1) ?

IV.2. Deuxième cas : P est élément de $\mathcal{C}_1$ et $n < 0$

a) Montrer que le point $P'(-p,-n)_{\mathcal{R}_0}$ est élément de $\mathcal{C}_1$.

b) En déduire qu'il existe un entier relatif k strictement négatif tel que $P = M_k$.

IV.3. Troisième cas : P est élément de $\mathcal{C}_2$

Montrer qu'il existe k élément de $\mathbb{Z}$ tel que $P = N_k$.

4. Analyse de la deuxième épreuve

1) Objet du problème et outils utilisés

Ce problème est construit autour de la résolution de l'équation diophantienne $n^2 - 3np + p^2 + n - p = 0$. La conique associée à cette équation est introduite comme section plane d'un cône de révolution, ce qui permet, dans la partie I, de donner la démonstration, dans un cas particulier facilement généralisable, du théorème de Dandelin.

Un ensemble assez large de domaines du programme d'algèbre et géométrie est abordé : géométrie affine euclidienne en dimension 3, géométrie affine plane, arithmétique dans $\mathbb{Z}$, théorie élémentaire des groupes, calcul matriciel, analyse réelle élémentaire (étude de fonctions et de suites), mais les connaissances et savoir-faire exigés des candidats sont modestes :

- étudier une quadrique au moyen d'un changement de repère orthonormal donné par l'énoncé : on ne demandait pas aux candidats de connaître les méthodes générales d'étude des quadriques ;
- reconnaître un cône de révolution ;
- savoir caractériser les applications affines du plan et savoir distinguer les symétries ;
- connaître le lemme de Gauss, qui suffit à traiter les questions d'arithmétique ;
- connaître les notions de sous-groupe et de morphisme de groupe ;
- connaître les bases du calcul matriciel, qui n'intervient que comme un outil de calcul "mécanique" ;
- savoir étudier une fonction simple de la variable réelle.

2) Remarques d'ordre général

Les copies sont, sauf exception, bien présentées et facilement lisibles : c'est un point très positif. Par contre, nombreux sont les candidats qui, dès les premières questions, ont du mal à suivre le cheminement imposé par l'énoncé. Ainsi, de très nombreuses copies font plusieurs fois les mêmes calculs aux questions **I.1.b)**, **I.1.c)** et **I.2.a)**, alors que le changement de repère effectué à la question **2.a)** n'est que le résultat du changement de base de la question **1.b)** et du changement d'origine mis en évidence aux questions **1.c)** et **1.d)**. On ne peut que conseiller aux candidats d'essayer de prendre un peu de hauteur dès le début du problème, ce qui ne peut se faire qu'en prenant le temps de bien se familiariser avec les (nombreuses) définitions et notations de la première page.

Comme indiqué en début d'énoncé, les trois premières parties étaient largement indépendantes : la grande majorité des candidats a abordé de façon significative deux de ces trois parties, rarement les trois. La partie IV n'a pratiquement jamais été traitée : il était très difficile de dominer suffisamment les parties précédentes pour répondre avec cohérence aux dernières questions. Remarquons qu'il y a toujours, dans les deux ou trois premières parties du problème, matière à rédiger une bonne copie, même en se limitant aux questions "élémentaires".

La première partie du problème a visiblement surpris par son côté calculatoire ; il est pourtant important pour un professeur de mathématiques de savoir calculer et on ne peut que conseiller au candidat de soigner ses calculs. S'il s'aperçoit que son résultat n'est pas cohérent avec la suite du problème, il doit refaire le calcul au brouillon (on peut relire dix fois un calcul faux sans détecter une erreur grossière) : il est en effet aberrant de voir une erreur d'étourderie

(oubli d'un signe, erreur d'addition, ...) à la question **I.1.b)** gâcher toute la suite de la partie I. Le même phénomène a été observé au début de la partie III : le candidat qui ne trouve pas la bonne équation à la question **1.a)** doit détecter son erreur dès la question **b)** et corriger son calcul.

La fin de la partie I, à partir de la question **2.d)**, a été très peu abordée et les démonstrations lues étaient souvent imprécises, voire fantaisistes. Certains candidats ont cependant fait preuve d'une excellente vision dans l'espace et leur copie a été valorisée.

3) Commentaires sur les questions les plus abordées

Partie I

1.a) La plupart des candidats ne pense pas à utiliser le produit vectoriel : rappelons que dans un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs unitaires et orthogonaux, le vecteur $w = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est l'unique vecteur tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit une base orthonormale directe. Dans de nombreuses copies, le vecteur $\overrightarrow{w}$ est calculé très laborieusement, le caractère direct de la base étant par ailleurs très mal pris en compte.

1.b) Les relations entre nouvelles et anciennes coordonnées lors d'un changement de base sont mal connues ; de nombreux candidats inversent un système alors que l'expression des nouveaux vecteurs donne directement la réponse à la question posée. Dans de très nombreuses copies, un résultat correct est obtenu après deux erreurs grossières (mauvaise formule de changement de base et transposition matricielle abusive : les erreurs se compensent car la matrice de passage est orthogonale).

1.c) Confusion courante entre le rayon du cercle et le carré de ce rayon. Les candidats qui pensent à prendre la racine carrée de la "constante" oublient souvent de vérifier le signe de cette constante. Enfin, rares sont les candidats qui simplifient le rayon (racine carrée d'un trinome de discriminant nul). Pour finir, ceux qui simplifient oublient en général la valeur absolue (le rayon d'un cercle est un réel positif).

2.a) Les résultats qui précèdent donnent directement l'équation demandée : de nombreuses copies refont en 2 ou 3 pages tous les calculs.

2.b) Peu de candidats reconnaissent l'équation d'un cône (elliptique) de révolution et l'axe de révolution est souvent mal caractérisé : on parle souvent *d'axe* $\overrightarrow{w}$ ou d'axe $(0, \overrightarrow{w})$, au lieu de l'axe $(S, \overrightarrow{w})$.

2.c) Des maladresses dans la construction de la figure : dans le repère donné, Y est l'abscisse, Z est l'ordonnée et les droites D_1 et D_2 sont de pente $\pm 1/\sqrt{5}$ et non pas $\pm\sqrt{5}$.

2.d) Des points ont été donnés aux candidats qui n'étaient pas capable de démontrer l'existences des cercles, mais qui les avaient construits "à la règle et au compas" sur leur schéma.

Partie II

1.a) Comme souvent, la preuve de l'équivalence est très mal rédigée. L'occasion nous est donnée de rappeler que $\Longrightarrow$ n'est pas une abréviation de la conjonction "donc" et que les symboles logiques $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\exists$ et $\forall$ ne doivent être employés que dans un cadre logique précis.

1.b) Le calcul de a_n et b_n ne pose aucun problème, mais les inéquations sont souvent très mal résolues : ainsi, on lit souvent qu'il y a équivalence entre $A \leqslant B$ et $A^2 \leqslant B^2$, sans qu'il soit fait référence aux signes des quantités A et B.

1.c) De nombreux candidats ne savent pas qu'un entier est un "carré parfait" s'il est le carré d'un nombre entier : 4 et 49 sont des carrés parfaits, mais 8 n'en est pas un.

1.d) Le lien avec les questions précédentes n'est souvent pas fait.

2. Dans toute cette partie, les candidats montrent une méconnaissance complète des notions de base de l'arithmétique. On peut lire en général le "théorème de Gauss" fantaisiste : si a divise bc et ne divise pas b, a divise c. Nous conseillons à tous les futurs candidats de trouver un contre-exemple à ce "théorème" et nous rappelons l'énoncé du lemme de Gauss : si a divise bc et si a est premier avec b, a divise c.

Partie III

1.c) Trop de candidats ne font pas le lien avec la question b).

2.b) La caractérisation d'un sous-groupe est souvent méconnue (il manque régulièrement qu'un sous-groupe doit être non vide, ou qu'il doit être stable par passage à l'inverse).

2.c) Cette question de cours a été très peu traitée.

2.d) Les démonstrations lues utilisent toutes une identification non justifiée, identification d'autant plus facile à deviner que le résultat était donné dans l'énoncé.

2.e) Très peu de copies ont présenté une résolution correcte de ce système pourtant élémentaire.

2.f) Les candidats qui ont abordé cette question disent tous qu'il faut montrer les différentes stabilités en étudiant tous les cas, mais beaucoup d'entre eux en oublient.

III SUJETS ET ANALYSE DES EPREUVES ORALES

1 . Liste des exposés (1e épreuve orale)

01. Utilisation d'arbres, de tableaux, de diagrammes pour des exemples de dénombrement. Dénombrement des arrangements et des permutations.

02. Exemples de problèmes dont la résolution fait appel à l'utilisation de graphes, orientés ou non.

03. Coefficients binomiaux, dénombrement des combinaisons, formule du binôme. Applications.

04. Description mathématique d'une expérience aléatoire : événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble d'événements élémentaires est fini).

05. Probabilité conditionnelle ; indépendance de deux événements (on se limitera au cas où l'ensemble d'épreuves est fini). Applications à des calculs de probabilité.

06. Variable aléatoire à valeurs réelles dont l'ensemble des valeurs est fini. Loi de probabilité. Espérance mathématique, variance. Exemples.

07. Schéma de Bernoulli et loi binomiale. Exemples.

08. Séries statistiques à deux variables numériques. Nuage de points associé. Ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Droites de régression. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

09. Propriétés axiomatiques de $\mathbb{N}$. Construction de $\mathbb{Z}$.

10. Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, unicité du quotient et du reste. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

11. PGCD de deux entiers naturels. Nombres premiers entre eux. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

12. Sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$. Egalité de Bézout. Résolution dans $\mathbb{Z}$ d'une équation de la forme $ax + by = c$.

13. Nombres premiers ; existence et unicité de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Exemple(s) d'algorithme(s) de recherche de nombres premiers. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

14. Congruences dans $\mathbb{Z}$. Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

15. Construction du corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Nombres décimaux, développement décimal d'un nombre rationnel.

16. Construction du corps $\mathbb{C}$ des complexes. Propriétés.

17. Module et argument d'un nombre complexe. Interprétation géométrique, lignes de niveau associées. Applications.

18. Interprétation géométrique des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $z \mapsto z+b$, $z \mapsto az$ et $z \mapsto \bar{z}$, où a et b appartiennent à $\mathbb{C}$, a non nul. Exemples d'application à l'étude de configurations géométriques du plan.

19. Étude de la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f : z \mapsto \dfrac{z-a}{z-b}$, où a, b sont complexes. Lignes de niveau pour le module et l'argument de la fonction f. Applications.

20. Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Applications.

21. Définition vectorielle d'une droite du plan, d'une droite ou d'un plan de l'espace. Représentations paramétriques. Génération des demi-droites, des segments. Parallélisme.

22. Équation cartésienne d'une droite du plan. Problèmes d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes.

23. Droites et plans dans l'espace. Positions relatives ; plans contenant une droite donnée.

24. Théorème de Thalès. Applications à la géométrie du plan et de l'espace.

25. Définition et propriétés du barycentre de n points pondérés. Application à l'étude de configurations du plan ou de l'espace.

26. Homothéties et translations ; transformation vectorielle associée. Effet sur l'alignement, les directions, les distances... Applications à l'action sur les configurations usuelles.

27. Composées d'homothéties et de translations du plan. Groupe des homothéties-translations. Applications.

28. Projection orthogonale sur une droite du plan, projection vectorielle associée. Applications (calculs de distances et d'angles, optimisation...).

29. Définition et propriétés du produit scalaire dans le plan ; expression dans une base orthonormale. Application au calcul de distances et d'angles.

30. Le cercle. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Point de vue géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vue.

31. Théorème de l'angle inscrit. Cocyclicité. Applications.

32. Relations métriques dans un triangle rectangle. Trigonométrie. Applications.

33. Relations métriques et trigonométriques dans un triangle quelconque. Applications.

34. Droites remarquables du triangle : bissectrices, hauteurs, médianes, médiatrices... (dans l'ordre que l'on voudra).

35. Produit vectoriel dans l'espace euclidien orienté de dimension trois. Point de vue géométrique, point de vue analytique. Applications.

36. Applications du produit scalaire et du produit vectoriel dans l'espace orienté : calculs de distances, d'aires, de volumes, d'angles...

37. Orthogonalité dans l'espace affine euclidien : droites orthogonales, droite orthogonale à un plan, plans perpendiculaires. Applications.

38. Réflexion du plan échangeant deux points donnés ; médiatrice, régionnement associé. Applications au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit...).

39. Réflexions du plan échangeant deux droites sécantes données, bissectrices. Applications au triangle et au cercle (cercle inscrit, tangentes à un cercle...).

40. Recherche des isométries du plan conservant un carré, un losange, un parallélogramme, un rectangle (dans l'ordre que l'on voudra).

41. Rotations planes. Notion d'angle. (On pourra traiter ces notions dans l'ordre que l'on voudra.)

42. Groupe des isométries du plan : décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements, classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants.

43. Étude des transformations du plan euclidien qui conservent les rapports de distances.

44. Recherche des isométries du plan conservant un polygone régulier ; exemples (triangle équilatéral, carré, hexagone, octogone...).

45. Réflexion de l'espace échangeant deux points donnés ; plan médiateur, régionnement associé. Étude des isométries de l'espace ayant une droite de points invariants.

46. Réflexions et rotations de l'espace. Effet sur les distances, les angles... Applications à l'action sur les configurations usuelles.

47. Courbes définies par des équations paramétriques dans le plan. Vecteur dérivé et tangente ; interprétation cinématique.

48. Définitions de la parabole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions. Construction de la tangente et de la normale en un point.

49. Définitions de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.

50. Définitions de l'hyperbole, géométriquement et par équation réduite ; équivalence entre ces définitions.

51. Exemples de représentation paramétrique des coniques ; constructions de la tangente et de la normale en un point à une parabole, une ellipse, une hyperbole.

52. Suites monotones, suites adjacentes. Approximation d'un nombre réel, développement décimal. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

53. Suites convergentes. Opérations algébriques, composition par une application continue. Limites et relation d'ordre.

54. Suites divergentes. Cas des suites admettant une limite infinie : comparaison, opérations algébriques, composition par une application.

55. Étude des suites de terme général a^n, n^b et $n!$ ($a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$). Croissances comparées. Exemples de comparaison de suites aux suites précédentes. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

56. Étude de suites de nombres réels définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et une condition initiale. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

57. Exemples d'étude de la rapidité de convergence d'une suite réelle $(u_n)_n$ vers une limite ℓ : cas où $|u_n - \ell|$ est dominé par n^{-a}, par k^n...L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

58. Limite finie d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$. Opérations algébriques sur les limites. Continuité d'une fonction en un point. Exemples.

59. Limite à l'infini d'une fonction à valeurs réelles. Branches infinies de la courbe représentative d'une fonction. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

60. Image d'un intervalle par une fonction continue, cas d'un segment. Cas d'une fonction continue strictement monotone.

61. Dérivée en un point, meilleure approximation affine, interprétation géométrique. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

62. Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivée d'une fonction composée. Exemples.

63. Fonction réciproque d'une fonction strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Étude de la continuité, de la dérivabilté. Exemples.

64. Comparaison des fonctions : domination, prépondérance, équivalence. Exemples et appli-

cations.

65. Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

66. Théorème de Rolle. Applications.

67. Formules de Taylor. Applications.

68. Développements limités, opérations sur les développements limités.

69. Fonctions polynômes.

70. Fonctions logarithmes.

71. Fonctions exponentielles.

72. Croissance comparée des fonctions réelles $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto \ln(x)$ au voisinage de $+\infty$. Applications. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

73. Caractérisation des fonctions exponentielles réelles par l'équation fonctionnelle : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

74. Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

75. Applications de la dérivation à l'étude des extremums éventuels d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

76. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.

77. Intégration par parties, par changement de variable. Exemples et applications.

78. Diverses méthodes de calcul approché d'intégrales définies. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

79. Méthodes d'approximation des zéros d'une fonction numérique réelle. Exemples. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

80. Étude des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. Exemples.

81. Exemples d'approximation d'une solution d'une équation différentielle par la méthode d'Euler. L'exposé pourra être illustré par un ou des exemples faisant appel à l'utilisation d'une calculatrice.

2. Liste des dossiers (deuxième épreuve orale)

Sujet donné le	**Thème**	
29 Juin	Arithmétique	
30 Juin	Séries statistiques à une variable	
1 Juillet	Suites	
2 Juillet	Les nombres complexes	
3 Juillet	Problèmes de grandeurs	Calculs de longueur, d'aires et de volumes
4 Juillet	Fonctions	Etude de recherche d'extremums et optimisation
5 Juillet	Techniques de dénombrement	
6 Juillet	Equations, inéuations du premier et du second degré à une inconnue (ou pouvant s'y ramener)	
7 Juillet	Problèmes de constructions	Constructions à l'aide de transformations
8 Juillet	Outils	Le calcul vectoriel et la géométrie analytique
12 Juillet	Outils	Le calcul vectoriel et la géométrie analytique
13 Juillet	Probabilités	Probabilités conditionnelles
14 Juillet	Outils	Les barycentres
15 Juillet	Problèmes de constructions	
16 Juillet	La proportionnalité	
17 Juillet	Fonctions	Etude du comportement local
18 Juillet	Intégration	Calcul d'intégrales par des méthodes variées
19 Juillet	Divers type de raisonnement (par l'absurde, par récurrence,...)	
20 Juillet	Problèmes de construction	Constructions utilisant des configurations connues
21 Juillet	Equations différentielles	

3 . Analyse des épreuves orales

Les épreuves orales ont été définies par un arrêté ministériel du 30 avril 1991 modifié par un arrêté du 3 août 1993. Les instructions les concernant ont été publiées dans le B.O. spécial n° 5 du 21 octobre 1993. Les objectifs communs aux deux épreuves orales sont précisés dans ces paragraphes, extraits des textes cités :

Les épreuves orales visent d'abord à évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement sur un thème donné.
A l'exception des quelques sujets d'exposé (première épreuve) où il est fait référence au programme complémentaire, il convient de se placer au niveau de l'enseignement secondaire, c'est-à-dire de ne pas dépasser le niveau du baccalauréat. Le candidat peut cependant être amené à faire appel aux connaissances acquises dans ses études supérieures pour analyser et commenter la démarche suivie, éclairer un point conceptuel ou technique et situer la question dans son contexte mathématique et scientifique.
La mise en valeur de l'enchaînement des étapes du raisonnement constitue un objectif majeur. Les candidats ne doivent en aucun cas se borner à l'exposé, si parfait soit-il formellement, d'une liste de définition, de théorèmes, d'exemples et d'exercices : il est indispensable de dégager l'articulation mutuelle des divers éléments.

3.1 Commentaires sur la 1˚ épreuve orale

On rencontre de très belles prestations, mais aussi les plus mauvaises. Les conseils qui suivent se tiennent volontairement à l'écart d'une collection de « perles » ; leur étude doit permettre à tout candidat d'améliorer sa performance, et en même temps ses capacités à exercer le métier d'enseignant.

Modalités pratiques

Rappelons brièvement le déroulement de cette épreuve. Le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets. Il devra choisir l'un des deux sujets et disposera de deux heures pour sa préparation, sans document; le candidat n'annoncera son choix que lors de sa parution devant le jury.

L'épreuve se déroule en deux phases : présentation de la leçon et questions du jury.

- La présentation de la leçon dure 25 minutes, **sans interruption** du jury. Cette première phase consiste à exposer un plan et à effectuer les démonstrations des propositions énoncées. Le plan doit être aussi riche que possible et peut contenir des exemples, contre-exemples et applications des outils introduits. Le candidat peut gérer son tableau à sa guise, néanmoins il serait bon de réserver une partie du tableau pour faire les démonstrations de manière à ce qu'à la fin l'ensemble du plan figure au tableau. Nous rappelons que cette partie ne fait pas un bon effet si elle se réduit à une recopie mot à mot des notes que l'on lit.

- La deuxième phase, d'une durée de 20 minutes, est réservée aux questions du jury. Ces questions peuvent être de divers ordres :

    - ✓ rectifier certaines erreurs ou préciser certains points obscurs dans le plan ou dans les démonstrations.

    - ✓ vérifier la maîtrise et le recul du candidat sur le sujet traité. En particulier, le candidat est censé répondre sur tous les points présentés dans son plan ainsi qu'à toutes questions relatives au sujet, qu'il aurait omises volontairement ou non.

Remarques sur l'épreuve

D'une manière générale le jury souhaiterait encourager les futurs candidats à donner une touche personnelle à leurs plans, ceci ne peut se faire qu'au prix d'un travail régulier et approfondi durant l'année de préparation.
Il n'est pas possible pendant les deux heures de préparation de monter une bonne leçon si le sujet n'a pas été travaillé pendant l'année de préparation au concours.
Il est par ailleurs risqué de laisser de trop grandes brèches ou « impasses » ; on voit des candidats déstabilisés devant un choix comportant deux sujets fort classiques, ce qui indique a priori que des chapitres entiers ont été ignorés pendant l'année de préparation.

- Sur le plan

Les plans doivent être structurés plus rigoureusement, en particulier :

- ✓ L'ordre dans lequel les notions sont présentées est essentiel, car il montre la vue d'ensemble du candidat par rapport à son sujet et doit éviter répétitions ou cercles vicieux.
- ✓ Le statut des énoncés est important et parfois joue un rôle important dans la qualité de la leçon : bien différencier une définition d'une proposition, un corollaire d'un théorème fondamental, etc … Par ailleurs il est important de savoir faire ressortir les points les plus importants, en les distinguant d'autres points secondaires. Les présentations formalisées « par équivalence » ne sont pas avantageuses, si les deux implications de sens contraire contenues dans l'équivalence sont de signification trop disparate : rappelons que l'on se prépare ici à l'enseignement secondaire, et non à l'enseignement devant un public de spécialistes. Le plan gagnera en qualité si chaque proposition reçoit une place correspondant à son importance et à sa difficulté (ou sa facilité) d'appréhension par le public de l'enseignement secondaire.
- ✓ Les définitions et les énoncés des propositions ou théorèmes doivent être préparés dans leur intégralité ; si le candidat n'écrit qu'une version abrégée, il doit s'attendre à ce que le jury lui demande une version détaillée et complète. Pour économiser du temps d'écriture, le candidat peut éventuellement utiliser des transparents.

Les plans peuvent être enrichis :

- ✓ en introduisant de nombreux exemples et contre-exemples bien choisis montrant pour les théorèmes à la fois, leur impact, la nécessité des hypothèses, les limites à leur application : un simple énoncé correct, c'est évidemment bien ; des développements tels que ceux qui viennent d'être décrits montrent que le candidat possède du recul, et une connaissance en profondeur du sujet traité.
- ✓ en donnant de nombreuses applications, y compris des applications *transversales* au sens où elles concernent, soit des domaines mathématiques différant du domaine usuel dans lequel s'inscrit le sujet, soit plus largement des domaines issus d'autres sciences , sciences physiques, astronomie, sciences naturelles, etc..
- ✓ en montrant des figures. En géométrie cela semble le plus naturel, mais un dessin peut se révéler très utile aussi dans les autres domaines, et particulièrement en analyse. Les figures géométriques peuvent être réalisées à main levée, ou aux instruments, ou encore préparées sur des transparents, ou enfin sur le logiciel de géométrie de la calculatrice. Il revient au candidat de choisir la méthode qui met le mieux en valeur son travail et ses compétences ; de belles figures réalisées à la main restent appréciées pour leur élégance ; à l'opposé, des figures bien présentées à la calculatrice, éventuellement animées, témoigneront des capacités du candidat à utiliser les moyens mis à sa disposition, et à s'investir ultérieurement dans l'utilisation des TICE

Le candidat choisit le niveau auquel il place son exposé. En conséquence :

- ✓ sa prestation lors de l'exposé doit rester cohérente avec le niveau qu'il a choisi
- ✓ s'il aborde les diverses notions de manière trop élevée sur le plan « théorique », le jury cherchera à vérifier la solidité de l'exposé au niveau correspondant, et il essayera de faire revenir le candidat aux aspects plus concrets et aux applications plus simples.
- ✓ s'il aborde le sujet à un niveau trop faible, le jury ne se satisfera pas de devoir rester à ce niveau, ce qui amène parfois certains (surtout s'ils écoutent mal les questions par la suite) à quitter le jury inconscients de leur médiocre performance

- Sur les démonstrations

Il arrive trop souvent que des candidats présentent un plan sans aucune démonstration. Cette manière de préparer l'épreuve est à proscrire. Rappelons que le candidat est jugé sur le contenu de son plan mais aussi sur sa prestation notamment au cours des démonstrations qui sont faites, en particulier *la pertinence* du choix des points démontrés par rapport au sujet et la *consistance* de ceux-ci sont un élément important d'appréciation. Cette exigence renforce la nécessité, pour le candidat, de disposer d'un minimum de recul par rapport aux connaissances présentées, recul nécessaire pour l'aider à trouver quels sont véritablement les « points forts » de son exposé.

D'une manière générale, il est conseillé de :

- ✓ choisir le développement *d'un ou de plusieurs points consistants, centraux par rapport au sujet*, permettant de montrer son aptitude à raisonner sur les notions étudiées .
- ✓ de montrer ses qualités pédagogiques en s'efforçant de donner la présentation la plus naturelle possible (l'utilisation de figures est recommandée chaque fois que cela est possible), faisant ressortir clairement la démarche scientifique utilisée et en mettant bien en relief les points cruciaux des différentes preuves; beaucoup de candidats se contentent d'aligner une suite de raisonnements, présentés artificiellement, sans être capable d'expliquer l'origine de leurs motivations.
- ✓ de bien vérifier l'absence de lacune dans l'enchaînement logique de la démonstration; il arrive souvent qu'un candidat se trouve complètement désarçonné lorsqu'on lui demande d'éclaircir certains passages, ce qui lui fait découvrir des difficultés qui lui avaient échappé.

- Sur les questions du jury

Les questions du jury peuvent porter aussi bien sur la conception, l'organisation du plan, que sur les démonstrations, abordées ou non, au cours de l'exposé. Elles peuvent également porter sur les pré-requis ou concerner certains prolongements omis, soit pour s'assurer de la solidité des connaissances, soit pour compléter un plan trop pauvre.

Nous insistons sur le fait qu'il est essentiel que les candidats aient un certain recul sur les notions qu'ils devront enseigner et ne peuvent donc en aucun cas se contenter de ne connaître que ce qui est exigible pour un élève du secondaire actuel. Par exemple, s'il est normal d'admettre lors d'un exposé le théorème « *Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle* » il est insuffisant de la part du titulaire d'une licence qu'il n'ait plus la moindre idée sur les propriétés permettant ce résultat. De même, si la définition rigoureuse des angles est hors de portée d'un élève il n'est pas acceptable qu'un futur enseignant n'y ait jamais réfléchi au point d'être incapable de fournir la moindre piste pour attaquer ce délicat problème, ou plus grave ne pas sembler comprendre l'importance de la question qui se pose.

L'entretien commence le plus souvent par la mise au point et la correction d'erreurs de détail, notamment de lapsus ou d'erreurs bénignes, de confusions de notation, etc. Le candidat ne doit pas penser que ces questions constituent des pièges. Dans la suite de l'entretien, il est important d'écouter réellement les questions : d'une part, une question mal écoutée et à laquelle on répond de manière précipitée risque de se conclure par des réponses inadaptées; d'autre part, on attend du futur professeur qu'il sache écouter et analyser les questions de ses futurs élèves, et pour cela, il lui faudra aussi « savoir écouter ».

Les questions ne sont pas de niveau constant : le jury peut souhaiter, par des questions très élémentaires, mettre le candidat en confiance ; par des questions plus profondes, il peut souhaiter donner au candidat la possibilité de montrer qu'il dispose de recul par rapport au sujet traité. Une absence de réponse, une erreur, ou une réponse erronée n'est pas nécessairement irréparable, bien au contraire : si le candidat, alerté par d'autres questions du jury, s'aperçoit de son erreur et est capable de la corriger, il laissera l'impression positive d'un futur enseignant capable de réagir valablement lorsqu'il est en difficulté

3.2 Commentaires généraux sur la 2° épreuve orale

L'exposé du candidat

Jouer la montre lors de l'exposé n'est pas pertinent ; le jury reporte le temps non utilisé pour l'exposé sur la deuxième partie de l'épreuve, et si le candidat remplit son temps d'exposé en résolvant en détail un exercice, - celui proposé par le jury ou un autre – le jury ne peut intervenir pendant cette résolution.
Faire un exposé plus court que les 25 minutes maximales autorisées n'est pas considéré comme une faute. Remplir les 25 minutes en traitant des points non demandés expose le candidat au risque d'être interrogé de manière plus exigeante et plus rapide puisque le jury aura moins de temps pour l'entretien. Bien entendu, un exposé de qualité long de 25 minutes est parfaitement pris en compte et joue en faveur du candidat lorsqu'il est conforme à la définition de l'épreuve.

Les thèmes des dossiers

Les thèmes dans lesquels s'inscrivent les dossiers étaient les mêmes que ceux utilisés pour la session précédente ; nous n'avons pas voulu, pour la deuxième année de fonctionnement de la nouvelle formule, créer des difficultés aux formateurs. Toutefois, il faut bien rappeler que ces thèmes n'ont rien d'immuable ; comme pour la formule antérieure de cette épreuve, l'évolution des thèmes restera progressive, le but étant de suivre le plus continûment possible l'évolution des programmes de l'enseignement secondaire et, plus généralement, de la discipline.
Comme l'an dernier, les impasses sont beaucoup plus risquées à cause de la suppression du choix. Tous les thèmes ne peuvent être cependant abordés puisqu'il ne sort qu'une vingtaine de dossiers, et les thèmes non abordés cette année sont susceptibles de l'être une autre année.
Par ailleurs, l'ensemble des 20 dossiers utilisés cette année a été construit en tenant compte de plusieurs contraintes ; couvrir au mieux l'ensemble des domaines des divers programmes était une contrainte, mais non décisive. On remarquera que le fait qu'un thème ait été abordé un certain jour n'a pas interdit qu'un thème très voisin, voire identique, apparaisse dans la suite de la session.

Interprétation du thème par les candidats, « hors-sujet »

Le jury a reçu pour instruction de juger avec une clémence particulière les « hors-sujet », ainsi que la manière dont le thème était couvert. Nous nous proposons de poursuivre dans cette voie, en rappelant que l'énoncé du thème est à prendre au sens littéral de la cartouche figurant en tête du dossier. Trop de candidats, par frilosité, n'ont pas osé s'éloigner de l'exercice proposé par le jury alors même que celui-ci ne couvrait qu'une faible partie du thème. Ils se contentaient de proposer parfois de simples démarquages de l'exercice proposé par le jury.

Pour renforcer l'information des candidats, les dossiers ont été légèrement modifiés dans leur présentation ; le thème dans lequel les exercices choisis par le candidat doivent se situer est rappelé littéralement dans l'intitulé de la question correspondante.
Il a aussi été noté que trop de candidats n'osaient pas varier le niveau des exercices qu'ils proposent. Certains dossiers suggèrent fortement cette ouverture, notamment par le moyen des extraits de programmes qui y sont attachés.

Equilibre des différents éléments de l'épreuve

La présidence du concours était très attentive à ne pas laisser le travail sur l'exercice proposé par le jury envahir l'ensemble de cette épreuve. Dans cet esprit, des instructions ont été données aux commissions de sorte qu'elle répartissent convenablement le temps d'entretien entre, d'une part, les questions relatives à l'exercice du jury, résolution éventuellement comprise, et d'autre part l'étude des exercices présentés par le candidat.
Des instructions similaires étaient données aux candidats : chaque vague est reçue séparément et reçoit une série de conseils pour préparer et passer l'épreuve dans les meilleures conditions. Parmi ces conseils figurait l'avertissement disant que le travail sur l'exercice proposé par le jury ne constituait qu'une partie de l'épreuve, et que par conséquent ils doivent penser à partager leur temps de préparation de manière adaptée à l'importance de chaque point à traiter.
Cette consigne de travail s'est heurtée au fait qu'une partie des candidats arrivait devant les commissions en ayant trop peu travaillé sur leurs propres exercices. Aussi dans certains cas, l'interrogation sur les exercices proposés par les candidats se trouvait-elle quelque peu limitée.
Nous avons renforcé cette demande d'équilibrage de l'épreuve en allégeant dans la mesure du possible le travail de rédaction demandé sur l'exercice proposé par le jury. L'importance des exercices proposés par les candidats se trouve ainsi très clairement réaffirmée.

Bilan relatif à cette nouvelle épreuve

La note de service ne modifiait en apparence que quelques éléments de définition de l'épreuve, mais la transformation est suffisamment profonde pour que l'on puisse parler de véritable nouvelle épreuve.
D'une part, la suppression du choix du dossier a conduit, y compris en première épreuve par un resserrement de l'éventail des choix d'exposés, à un accroissement très fort du risque couru lorsque le candidat « fait des impasses ». Il ne semble pas que cela ait conduit à une démoralisation des candidats. Plusieurs faits ont sans doute joué ; le taux de succès au concours, commandé par le nombre des postes puisque le jury les a tous pourvus, n'en a aucunement souffert ; la moyenne des notes attribuées n'est pas inférieure à celles qui étaient attribuées lors des sessions précédentes, ce qui montre que les commissions ont d'instinct adapté leurs exigences à l'accroissement objectif de la difficulté de l'épreuve consécutive à la suppression du choix.
D'autre part, le fait de donner un exercice comme base de travail aux candidats a conduit, en ce qui concerne les questions et l'exposé du candidat relatif à cet exercice, à une amélioration de la qualité des exposés, (fait très généralement noté par les commissions) ce qui a sans doute contribué aussi au maintien des notes à un niveau satisfaisant.

Un deuxième objectif était visé : la réhabilitation de dossiers traditionnellement « mal-aimés », soit parce que portant sur le niveau collège, soit parce qu'ils traitent de « mathématiques appliquées » (probabilités, graphes, statistiques, modélisation). Il était possible de construire le lot de dossiers qui a été utilisé pour cette session en y intégrant un nombre significatif de ces thèmes.
Un troisième objectif était la prise en compte des TICE. Les deux modèles de machine mis en service ont permis de mettre en valeur les domaines usuels d'intervention du calcul automatisé dans l'enseignement secondaire : mise en œuvre d'algorithmes, tracé de figures géométriques pouvant être animées, calculs statistiques. La mise en œuvre de dossiers comportant une ou plusieurs questions devant explicitement être résolues à l'aide d'une calculatrice obligeait les candidats à passer par la machine.
Le message fort selon lequel il est risqué de se présenter à cette épreuve si l'on ne possède pas quelques rudiments sur la manipulation de l'un de ces modèles est certainement passé. Rappelons ici que le niveau de virtuosité demandé reste très raisonnable, et que le jury a publié un document – un pour chaque modèle, les deux étant mis sur pied d'égalité autant que possible – précisant dans quel esprit nous nous attendons à voir employer ces machines. Pour la prochaine session qui verra revenir un troisième constructeur, un document similaire sera publié pour le modèle fourni.

Enfin, un dernier objectif était l'approfondissement de la culture commune de l'évaluation au sein du jury. Nous avons mis en oeuvre des dispositifs de contrôle quotidien permettant d'assurer que l'équité du concours était maintenue, et que les candidats ne se sont pas trouvés pénalisés – ou favorisés – par le fait qu'ils ont passé leur épreuve sur dossier tel ou tel jour, sur un dossier d'apparence plus difficile ou plus facile. Le fait que chaque commission recevait successivement cinq candidats traitant le même dossier jouait évidemment aussi en faveur de l'équité de la notation, et, contrairement à certaines craintes initiales, les a conduit à apprécier cette manière de travailler.
Ce suivi journalier a permis de constater qu'il n'y avait pas de dérive contraire à l'équité du concours ; les répartitions journalières des notes de seconde épreuve orale varient un peu, certes, mais pas de manière significativement plus forte que les moyennes journalières de première épreuve orale. Il n'a pas été nécessaire de recourir a des ajustements *a posteriori*.

3.3 Les dossiers de la 2° épreuve orale

Ci-dessous, les vingt dossiers dans l'ordre de leur parution. On n'a pas jugé utile de donner ici les annexes des dossiers, c'est-à-dire les extraits de programmes qui les accompagnent.

Ces dossiers sont suivis par vingt courts rapports ; on a indiqué pour chaque dossier les classes pour lesquelles des extraits de programmes avaient été mis en annexe ; dans deux cas particuliers, une solution rédigée de l'exercice proposé par le jury est donnée.

Sujet du 29 Juin

Thème : Arithmétique

1. L'exercice proposé au candidat

1) Soit m un entier relatif. On note (E_m) l'équation $11x + 13y = m$, d'inconnue (x, y). Trouver toutes les solutions (x, y) de (E_m) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2) On suppose désormais que m est un entier naturel. Montrer qu'il y a autant de solutions (x, y) de l'équation (E_m) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qu'il y a d'entiers dans le segment $\left[\frac{5m}{11}, \frac{6m}{13}\right]$.

3) Montrer que si $m < 143$ (resp. $m \geqslant 143$), alors l'équation (E_m) possède au plus (resp. au moins) une solution (x, y) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.

$Q.2$) Ecrire un algorithme renvoyant, pour un entier naturel m donné, la ou les solutions éventuelles (x, y) de l'équation (E_m) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Cet algorithme pourra être implanté sur votre calculatrice ou simplement décrit au tableau dans un langage de votre choix.

$Q.3$) Comment pourrait-on montrer que 119 est le plus grand entier naturel m tel que (E_m) n'ait pas de solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.2$).

– Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème **« Arithmétique »**.

Sujet du 30 Juin

Thème : Séries statistiques à une variable

1. L'exercice proposé au candidat

Le tableau ci-contre indique, pour chaque mois de l'année 2004, trois données concernant le site web du CAPES (la « bande passante » représente le volume d'information qui a été chargé).

Mois	Visiteurs différents	Visites	Bande passante
Janvier 2004	353	425	62 Mo
Février 2004	577	744	144 Mo
Mars 2004	834	1 151	169 Mo
Avril 2004	650	803	132 Mo
Mai 2004	2 498	3 404	1 021 Mo
Juin 2004	2 324	3 254	907 Mo
Juillet 2004	2 636	3 482	589 Mo
Août 2004	1 410	1 916	274 Mo
Septembre 2004	2 525	3 553	681 Mo
Octobre 2004	2 897	4 135	2 600 Mo
Novembre 2004	3 861	5 232	4 372 Mo
Décembre 2004	2 452	3 157	2 499 Mo

a Donner pour ces trois séries de données le tableau des effectifs cumulés croissants. À quels types de questions ces tableaux permettent-ils de répondre ?

b Calculer la moyenne du nombre des visiteurs et la moyenne du nombre des visites. On s'intéresse au nombre moyen de visites par visiteurs : un élève propose de le calculer chaque mois et de faire la moyenne des résultats obtenus. Un autre propose de faire le quotient moyenne des visites moyenne des visiteurs. Obtient-on le même résultat ? Pourquoi ? En moyenne quelle est la bande passante utilisée par un visiteur ?

c Proposer une ou deux représentations graphiques permettant de visualiser les données du tableau.

2. Le travail demandé au candidat

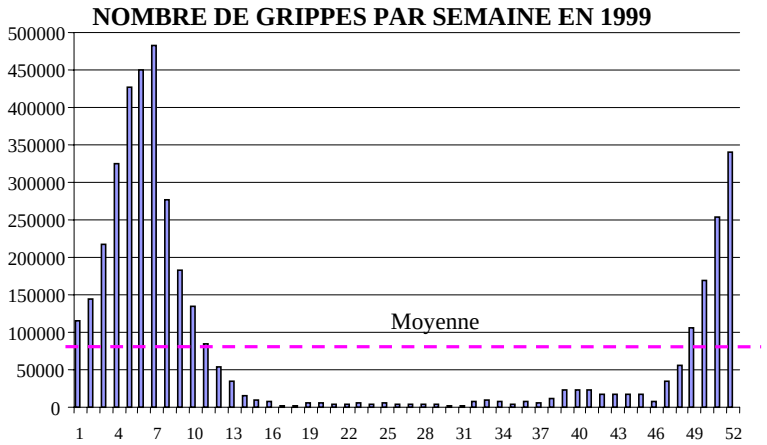
En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1. Préciser à quel niveau d'enseignement une telle activité peut trouver sa place. Indiquer comment vous la mettriez en œuvre dans une classe.

Q.2. Quelles représentations graphiques peut-on obtenir en réponse à la question 3) ? Montrer sur un écran de calculatrice une de ces représentations.

Q.3. Donner au moins un autre exemple permettant d'illustrer l'intérêt et les limites de la notion de moyenne, vous pourrez (sans que ce soit une obligation) utiliser le graphique ci-contre. Énoncer les théorèmes mis en jeu dans l'exercice.



Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– sa réponse à la question Q.3.
– un ou plusieurs exercices sur le thème : **« Séries statistiques à une variable. »**

Sujet du 1 Juillet

Thème : Les suites

1. L'exercice proposé au candidat

Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = a \in \mathbb{R} \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+2} = \alpha u_{n+1} - (\alpha - 1)\, u_n \end{cases}$$

1) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
En déduire v_n en fonction de α, n, et a.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+1} - (\alpha - 1)\, u_n$. Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.

3) Calculer u_n en fonction de v_n et w_n puis u_n en fonction de α, n et a.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Proposer une utilisation de la calculatrice pour le calcul des premiers termes des trois suites rencontrées.

$Q.2$) Comment choisiriez-vous les suites auxiliaires $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie avec une relation de récurrence de la forme : $u_{n+2} = 2u_{n+1}+3u_n$?

$Q.3$) Le paramètre α prend des valeurs dans $\mathbb{R}$ privé de 2, pourquoi ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

(i) sa réponse à la question $Q.2$)

(ii) Deux exercices sur le thème des suites, mettant en jeu d'autres notions sur les suites.

Sujet du 2 Juillet

Thème : Outils
Les nombres complexes

1. L'exercice proposé au candidat

On se donne un rectangle $ABCD$ (direct) et on pose $AB = CD = a$, $AD = BC = b$ ($a > 0$, $b > 0$).
On se pose le problème suivant (cf fig.1) : existe-t-il un triangle équilatéral APQ inscrit dans le rectangle $ABCD$ (le point P appartenant au segment $[BC]$ et le point Q au segment $[CD]$) ?

1) Soit P un point quelconque de $[BC]$ et Q un point quelconque du segment $[CD]$. On pose $DQ = x$ et $BP = y$. Montrer que APQ est équilatéral si et seulement si $\begin{cases} x = 2a - b\sqrt{3} \\ y = 2b - a\sqrt{3} \end{cases}$

   Indication : utiliser les affixes, et une rotation de centre A.

2) En déduire que le problème a une solution si et seulement si $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et qu'alors elle est unique.

3) On suppose que le problème posé admet une solution. On construit les triangles équilatéraux BCI et CDJ, comme indiqué figure 2. Soit P le point d'intersection des droites (AJ) et (BC), et Q le point d'intersection des droites (AI) et (CD). Montrer que APQ est le triangle équilatéral cherché.

   En déduire une construction du triangle APQ à la règle et au compas.

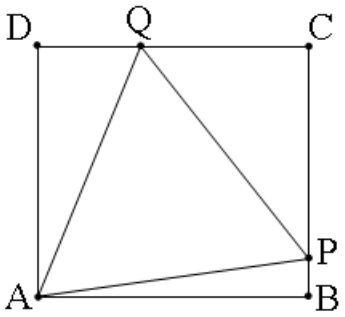


fig.1

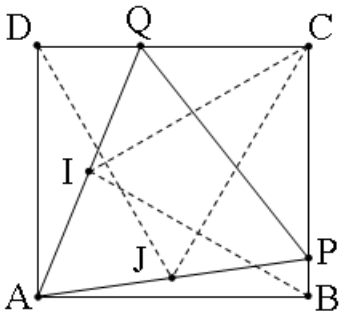


fig.2

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1 Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.

Q.2 En utilisant l'environnement de géométrie dynamique de la calculatrice, construire le rectangle $ABCD$ et le triangle équilatéral APQ (quand il existe). Animer la figure de façon à voir les conditions limites entre lesquelles le problème posé admet une solution.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question *Q*.1).

– Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème **« Géométrie : nombres complexes »**.

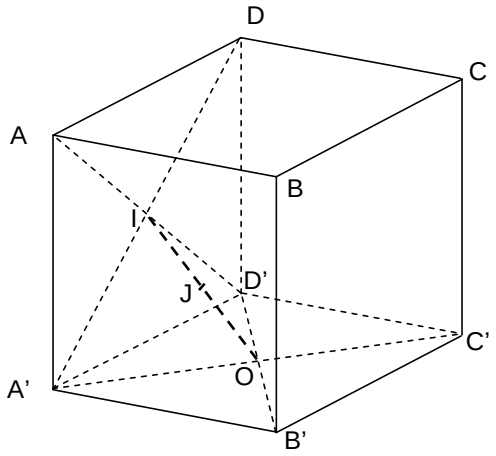
Sujet du 3 Juillet

Thème : Problèmes de calculs de grandeurs

Calculs de longueurs, d'aires et de volumes

1. L'exercice proposé au candidat

$ABCDA'B'C'D'$ est un cube de côté 4 cm, I et O sont les centres respectifs des carrés $ADD'A'$ et $A'B'C'D'$.



1) Construire le triangle $A'C'D$ en vraie grandeur.
2) a) Montrer que OCC' est rectangle en C'.
   b) Calculer OC.
3) Calculer IC.
4) Soit J le milieu de $[OI]$. Calculer CJ puis $A'J$ puis $A'C$.
5) a) Les points A', J et C sont-ils alignés ?
   b) Quelle est la position relative de la droite (OI) et du plan $(A'JC)$?
6) Déterminer le volume de la pyramide $OD'A'BC$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

$Q.2$) Construire un énoncé démontrant que les points A', J et C ne sont pas alignés en utilisant les théorèmes d'incidence de seconde.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.2$).
– deux énoncés d'exercices, variés par le niveau concerné et la méthode de résolution utilisée, se rapportant au thème : « **Problèmes de calculs de grandeurs : Calculs de longueurs, d'aires et de volumes** »

Sujet du 4 Juillet

Thème : Fonctions
Etude de recherche d'extremum et d'optimisation

1. L'exercice proposé au candidat

1) Pour tout réel α de $]0, 2[$, on considère la fonction $x \mapsto g_\alpha(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-(x+\alpha)^2}$.

   a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_\alpha$ de g_α.
   Montrer que la courbe représentative de g_α possède un axe de symétrie vertical.

   b) Montrer que pour tout x de $\mathcal{D}_\alpha$, on a $g''_\alpha(x) < 0$.
   En déduire que g_α admet un unique maximum en $x_0 = -\dfrac{\alpha}{2}$.

2) En utilisant g_α, montrer que l'aire maximale d'un trapèze de hauteur α (avec $0 < \alpha < 2$) inscrit dans un cercle de rayon 1 est égale à $\alpha\sqrt{4-\alpha^2}$ (en unités d'aire).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

$Q.1$) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

$Q.2$) Utiliser la calculatrice pour vérifier les résultats des questions 1 et 2 (sans que cela se substitue aux calculs « à la main »).

$Q.3$) Quelle suite pourriez-vous donner à la question 2) ?

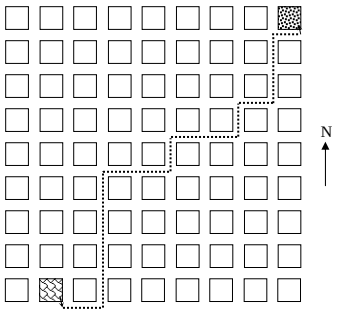
Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :
– Sa réponse à la question $Q.3$).
– Deux exercices sur thème **« problèmes d'optimisation »**.

Sujet du 5 Juillet

Thème : Techniques de dénombrement

1. L'exercice proposé au candidat

Un homme travaille à Manhattan, dans un quartier où les avenues sont orientées nord-sud et les rues est-ouest. Il travaille à sept pâtés de maison à l'est et huit pâtés de maison au nord de son domicile. Pour aller à son travail chaque jour il parcourt donc la longueur de quinze pâtés de maison (il ne se dirige ni au sud ni à l'ouest).
On suppose qu'il existe une voie le long de chaque pâté de maisons et qu'il peut prendre n'importe lesquelles dans ce schéma rectangulaire. Le dessin ci-dessous illustre la situation ; un trajet a été représenté en pointillé.



1) Proposer un « codage » permettant de décrire le trajet représenté.
2) Combien de trajets différents l'homme peut-il emprunter ?
3) L'homme prétend que le nombre de trajets est aussi le nombre de suites de huit entiers naturels dont la somme est 8. A-t-il raison ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

Q.1) À quel niveau pensez-vous pouvoir proposer cet exercice ? Quelles indications souhaiteriez-vous ajouter (questions intermédiaires, suggestion de représentations,. . .) ?

Q.2) La question 3) de l'exercice

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :
– Deux exercices sur le thème :**« Techniques de dénombrement »**

Sujet du 6 Juillet

Thème : Équations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue ou pouvant s'y ramener

1. L'exercice proposé au candidat

Elio et Nora s'arrêtent au magasin du coin de la rue et composent chacun un assortiment de friandises comportant des bonbons et des chewing-gums.
Les deux enfants se servent le même nombre de bonbons et Elio prend deux fois plus de chewing-gums que Nora. Un bonbon coûte 6 centimes d'euro, un chewing-gum 12 centimes d'euro. L'assortiment composé par Nora a une valeur de 1,20 euro. Elio a acheté 20 friandises.

1) Quelle peut être la composition de l'assortiment de Nora ?
2) On sait de plus qu'Elio a payé 1,68 euro. Quelle peut être la composition de l'assortiment de Nora ?

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice.
Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

*Q.*1) Dégager les diverses étapes de la résolution de cet exercice (on pourra distinguer suivant le niveau de la classe).

*Q.*2) Indiquer les connaissances et savoir-faire mis en jeu ainsi que les objectifs d'apprentissage visés dans cet exercice.

*Q.*3) Le nombre de solutions d'un problème se ramenant à la résolution d'une équation du premier ou du second degré à une inconnue est-il dépendant du choix de cette inconnue lorsque plusieurs possibilités sont envisageables ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

i) sa réponse à la question Q.2)

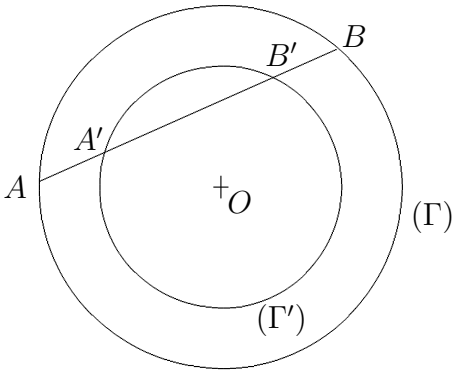
ii) l'énoncé d'exercices se rapportant au thème **«Équations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue ou pouvant s'y ramener »**.

Sujet du 7 Juillet

Thème : Problèmes de constructions

Constructions à l'aide de transformations

1. L'exercice proposé au candidat



Dans cet exercice on considère deux cercles concentriques (Γ) et (Γ'), de rayons respectifs r et r' avec $r > r'$ (figure ci-contre).
Le but de l'exercice est la construction d'une corde $[AB]$ de (Γ), coupant (Γ') en deux points A' et B', telle que :

$$AA' = A'B' = B'B$$

i) a) Justifier que le point A peut être choisi arbitrairement sur (Γ).

b) Montrer que, pour toute corde $[AB]$ de (Γ) coupant (Γ') en deux points A' et B', on a $AA' = BB'$.

ii) On fixe un point A sur (Γ) et on note (Γ_1) l'image de (Γ) par l'homothétie h de centre A et de rapport $\frac{1}{3}$.

a) Montrer que, si une corde solution du problème existe, alors $A' \in (\Gamma_1) \cap (\Gamma')$.

b) En déduire le nombre de cordes convenables menées de A (on discutera suivant les valeurs du rapport $\frac{r'}{r}$).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les méthodes utilisées dans cet exercice.

$Q.2$) Construire la figure de l'énoncé à l'aide du module de géométrie d'une calculatrice et indiquer des utilisations possibles de cette construction avec des élèves.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :
Deux exercices sur le thème : « **Problème de construction : Construction à l'aide de transformations** », dont l'un, au moins, utilisera une autre transformation que celle utilisée dans l'exercice proposé.

Sujet du 8 Juillet

Thème : Outils
Le calcul vectoriel et la géométrie analytique

1. L'exercice proposé au candidat

On considère dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ le cercle Γ de centre O et de rayon 1.
Soit A le point de coordonnées $(1; 0)$ et soit A' le point de coordonnées $(-1; 0)$.

1) Pour tout point H du segment $[AA']$, distinct de A et A', on mène la perpendiculaire Δ à la droite (AA'). La droite Δ coupe le cercle Γ en M et M'. On pose $\overrightarrow{OH} = x\ \vec{i}$. Calculer, en fonction de x, l'aire du triangle AMM'.
2) Soit f la fonction numérique définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$. Dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que le triangle, AMM', d'aire maximale est équilatéral.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les méthodes et les théorèmes utilisés dans cet exercice.

$Q.2$) Construire, à l'aide du module de géométrie d'une calculatrice, la figure proposée et conjecturer à l'aide de cette figure le résultat attendu.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

Deux exercices sur le thème : **« Le calcul vectoriel et la géométrie analytique. »**

Sujet du 12 Juillet

Thème : Outils

Le calcul vectoriel et la géométrie analytique

1. L'exercice proposé au candidat

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'ensemble $(\mathscr{S})$ défini par :

$$\mathscr{S} = \left\{ M(x, y, z) \in \mathscr{E};\ \ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z + 1 = 0 \right\}$$

1) Montrer que $(\mathscr{S})$ est une sphère dont on donnera le centre et le rayon.

2) Montrer que le point $A(2, 2, -1)$ appartient à $(\mathscr{S})$ et déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P}_1)$ tangent à $(\mathscr{S})$ au point A.

3) a) Montrer que le plan $(\mathscr{P}_2)$ d'équation $x + y - z - 1 = 0$ coupe $(\mathscr{S})$.

   b) Déterminer le rayon du cercle $(\mathscr{C})$ intersection de $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{S})$.

   c) Déterminer les coordonnées du point Ω centre de $(\mathscr{C})$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Enoncer les théorèmes et les outils mis en jeu dans l'exercice.

$Q.2$) Rédiger un énoncé détaillé pour aider un élève de Terminale S à faire la question 3) c).

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.2$).
– Les énoncés de deux exercices de géométrie analytique dont l'un au moins permet de résoudre un problème posé dans l'espace.

Sujet du 13 Juillet

Thème : Probabilités conditionnelles

1. L'exercice proposé au candidat

On considère un carré $ABCD$ et son centre de gravité Ω. On note $\mathcal{E} = \{A, B, C, D, \Omega\}$.
Une puce se déplace aléatoirement en sautant d'un point de $\mathcal{E}$ à un autre. La seule contrainte est que si un saut relie deux sommets du carré, ceux-ci doivent être adjacents. À chaque saut, tous les déplacements possibles sont équiprobables. La puce ne reste pas deux fois de suite au même endroit.
Au départ (c'est-à-dire avant son premier saut) elle se trouve au point Ω.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note Ω_n l'événement « *la puce se trouve au point* Ω *à l'issue de son* n*-ième saut* ».
On définit de même les événements A_n, B_n, C_n, D_n. On notera $p_n = p(\Omega_n)$ (donc $p_0 = 1$).

1) Calculer p_1 et p_2.
2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier les égalités $p(A_n) = p(B_n) = p(C_n) = p(D_n) = \dfrac{1}{4}(1 - p_n)$.
3) Montrer que $p_{n+1} = \dfrac{1}{3}(1 - p_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (utiliser la formule des probabilités totales).
4) En déduire que pour tout n on a $p_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{4}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.

Q.2) Comment se généralise le problème si l'on remplace le carré $ABCD$ par un polygone à k sommets ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

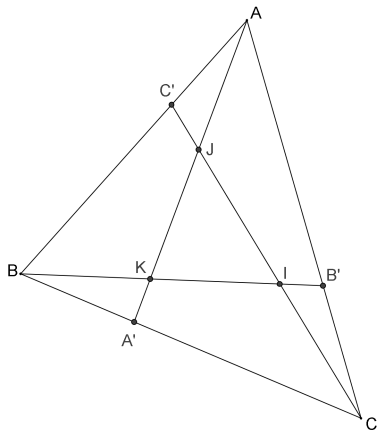
– Sa réponse à la question *Q*.2).
– Un ou deux exercices se rapportant au thème **« Probabilités conditionnelles »**.

Sujet du 14 Juillet

Thème : Outils
Les barycentres

1. L'exercice proposé au candidat

Soit ABC un triangle du plan.
Les points A', B' et C' sont respectivement définis par $\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CB'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.
Les droites (AA') et (BB') se coupent en un point K, les droites (BB') et (CC') se coupent en un point I et les droites (AA') et (CC') en un point J.



1) Ecrire les points A', B' et C' comme barycentres des points A, B et C.
2) Montrer que le point I est barycentre de $(A, 2)$, $(B, 1)$ et $(C, 4)$.
3) Définir de même les points J et K comme barycentres des points A, B et C.
4) Montrer que les points I, J et K sont respectivement les milieux de $[CJ]$, $[AK]$, et $[BI]$.
5) En déduire une comparaison des aires des triangles BKJ, IJK, ABJ et AIJ et déterminer le rapport des aires des triangles ABC et IJK.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Enoncer les propriétés des barycentres utilisées dans cet exercice.

$Q.2$) Quelle réponse feriez-vous à un élève qui vous demanderait comment traiter la question 2) si les coefficients n'étaient pas fournis ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– Sa réponse à la question $Q.1$).
– Les énoncés d'un ou plusieurs autres exercices, dans lesquels une étude barycentrique permet de mettre en évidence des propriétés géométriques, en variant les situations étudiées.

Sujet du 15 Juillet

Thème : Problèmes de constructions

1. L'exercice proposé au candidat

On considère deux droites parallèles d et δ et un point A n'appartenant ni à d ni à δ. Le but de l'exercice est de construire un triangle ABC rectangle isocèle en B tel que le point B appartienne à la droite d et que le point C appartienne à la droite δ .

1) Si une telle construction est réalisable, déterminer les similitudes directes de centre A qui transforment B en C.
2) Résoudre le problème posé. Combien y a-t-il de solutions ?
3) Reprendre l'exercice en supposant les droites d et δ sécantes.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Expliciter la démarche générale de résolution de ce problème.

$Q.2$) Quelles indications, ou questions supplémentaires ajouteriez-vous à l'énoncé pour le proposer à une classe ?

$Q.3$) Présenter à l'aide du module de géométrie dynamique de la calculatrice la figure comportant les solutions du problème lorsque les droites d et δ sont parallèles.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

– sa réponse à la question $Q.2$) ;
– l'énoncé d'un exercice se rapportant au thème : **« problèmes de construction »**.

Sujet du 16 Juillet

Thème : La proportionnalité

1. L'exercice proposé au candidat

Pendant plusieurs siècles, on a utilisé et enseigné la règle de *fausse position*. L'encadré ci-dessous propose un extrait d'un ouvrage édité en 1784, consultable aujourd'hui sur le site de la Bibliothèque Nationale de France, expliquant cette règle.

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE
MATHÉMATIQUES.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Gottingue, & de l'Institut de Bologne; Professeur de Mathématiques au Collége Mazarin.*

265. *La regle de fauſſe poſition* ſert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre ſuppoſé. Soit propoſé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart & le cinquieme faſſent 456.

Je ſuppoſe que ce nombre eſt 20. Mais il eſt clair que la moitié, le quart & le cinquieme de 20 ne font que 19. Ma ſuppoſition eſt donc fauſſe. Elle n'en ſervira pas moins cependant à me faire connoître le nombre demandé. Car puiſque deux quantités ſont toujours entre elles comme leurs parties ſemblables (242), on peut les regarder l'une comme la ſomme des antécédents d'une ſuite de termes proportionels, l'autre comme la ſomme des conſéquents. Or ces deux ſommes ſont entre elles (241), comme un nombre quelconque d'antécédents eſt au même nombre de conſéquents, & réciproquement; donc la moitié plus le quart, plus le cinquieme de 20, ſont à la moitié, plus au quart, plus au cinquieme du nombre que je cherche, comme le nombre 20 lui-même eſt au nombre cherché. J'ai donc, $19 : 456 :: 20 : x = 480$.

En utilisant la typographie actuelle

Proposition 265. La règle de fausse position sert à trouver un nombre inconnu par le moyen d'un nombre supposé. Soit proposé, par exemple, de trouver un nombre dont la moitié, le quart et le cinquième fassent 456.

Je suppose que ce nombre est 20. Mais il est clair que la moitié, le quart et le cinquième de 20 ne font que 19. ma supposition est donc fausse. Elle n'en servira pas moins cependant à me faire connaître le nombre demandé. Car puisque deux quantités sont toujours entre elles comme leurs parties semblables (Proposition 242), on peut les regarder l'une comme la somme des antécédents d'une suite de termes proportionnels, l'autre comme la somme des conséquents. Or ces deux sommes sont entre elles (Proposition 241), comme un nombre quelconque d'antécédents est au même nombre de conséquents et réciproquement; donc la moitié plus le quart, plus le cinquième de 20 sont à la moitié plus le quart, plus au cinquième du nombre que je cherche, comme le nombre 20 est lui même au nombre cherché.

J'ai donc, $\frac{19}{456} = \frac{20}{x}$ soit $x = 480$.

1) Résoudre le problème posé : « trouver un nombre dont la moitié, le quart et le cinquième fassent 456 ».
2) Le nombre 20 a-t-il été choisi au hasard ? Le résultat trouvé dépend-il de ce choix ?
3) L'auteur fait référence à deux propriétés établies auparavant (numérotées 242 et 241). la première citée (242) :« Deux quantités sont toujours entre elles comme leurs parties semblables » peut se traduire aujourd'hui par l'égalité : $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$. Quelle propriété des tableaux de proportionnalité peut traduire la seconde ?
4) En appliquant cette méthode, trouver la solution du problème posé par Fancès Pellos gentilhomme niçois de la fin du XV^{e}siècle : « *Une lance a la moitié et le tiers dans l'eau et 9 paumes à l'extérieur. Je te demande combien elle a de long ?* ».

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Quelles sont les propriétés sur lesquelles repose la « règle de la fausse position » ?

Q.2) Quelle classe de problèmes cette règle permet-elle de résoudre ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

Divers exercices sur le thème « **La proportionnalité** ». On veillera à ce que ce choix recouvre diverses classes de l'enseignement secondaire.

Sujet du 17 Juillet

Thème : Fonctions
Etude du comportement local

1. L'exercice proposé au candidat

On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\cos x}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \mathbb{I}, \mathbb{J})$ du plan.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine O du repère.

1) a) Déterminer l'équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a de $[0, \pi]$.

   b) Montrer que T_a passe par O si et seulement si $a \sin a = 1$.

2) Soit la fonction ψ définie sur $]0, \pi]$ par $\psi(x) = \sin x - \dfrac{1}{x}$.

   a) Étudier les variations de ψ' sur $]0, \pi]$.

   b) En déduire que la fonction ψ admet un maximum absolu M qu'elle atteint en un unique x_0 de l'intervalle $]0, \pi]$.

   c) Calculer $\psi'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et en déduire la position de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à x_0.

   d) Calculer $\psi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ et en déduire le signe de M.

3) À l'aide des questions précédentes, déterminer le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ qui passent par O.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le Jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les outils et les méthodes nécessaires à la résolution de cet exercice.

$Q.2$) A l'aide de votre calculatrice, donner une valeur approchée des coordonnées des points où la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par O. Tracer $\mathcal{C}_f$ et les tangentes en question.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :
– Sa réponse à la question $Q.1$).
– Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème **« Fonctions »**.

Sujet du 18 Juillet

Thème : Intégration
Calcul d'intégrales par des méthodes variées

1. L'exercice proposé au candidat

1) Vérifier que pour tout x réel :

$$\frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x}$$

2) En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$.

3) Déterminer $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{(1+e^x)}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\mathrm{d}x$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

*Q.*1) Enoncer les résultats fondamentaux pour le calcul des intégrales mis en jeu dans l'exercice précédent.

*Q.*2) Quelle réponse feriez-vous à un élève qui vous demanderait comment calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)^4}$?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :
- sa réponse à la question *Q.2)*
- d'autres exercices sur le thème **« Calculs d'intégrales par des méthodes variées »**

Sujet du 19 Juillet

Thème : Divers types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence,...)

1. L'exercice proposé au candidat

On se propose ici d'illustrer une figure du raisonnement mathématique : le raisonnement par l'absurde.

On se donne une partie A de $\mathbb{N}^*$, finie et non vide.
On suppose que pour tous éléments m et n de A, l'entier $\dfrac{m+n}{\text{pgcd}(m,n)}$ est encore dans A.

1) Montrer que l'entier 2 est élément de A.
2) Montrer que l'ensemble fini A ne contient que des entiers pairs.
3) Montrer que l'ensemble A se réduit au singleton $\{2\}$.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera la question suivante :

$Q.1$) Dégager les outils et méthodes nécessaires à la résolution de l'exercice.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera au moins deux exercices illustrant le raisonnement par l'absurde, ou par contraposition, ou par « analyse-synthèse ». A cet effet, il puisera dans les domaines de la géométrie, de l'analyse, des probabilités...

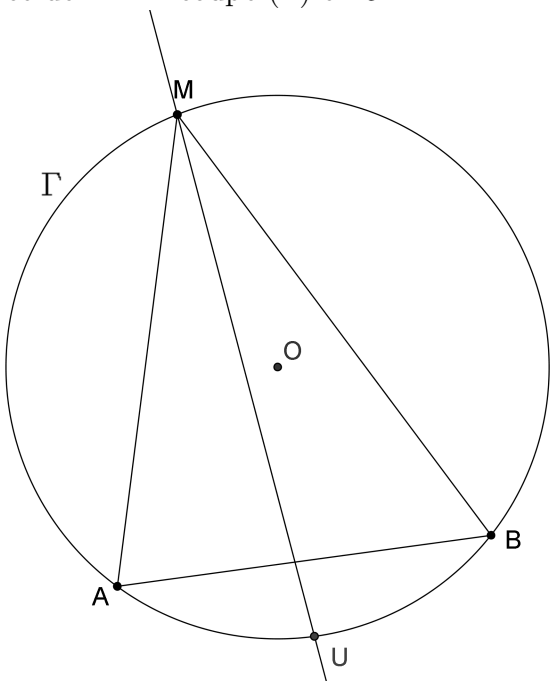
Sujet du 20 Juillet

Thème : Problèmes de constructions

Constructions utilisant des configurations connues

1. L'exercice proposé au candidat

Soit (Γ) un cercle de centre O et $[AB]$ une corde de (Γ). Soit M un point de (Γ), distinct de A et de B. La bissectrice de $\widehat{AMB}$ coupe (Γ) en U.



1) A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure. Quelle conjecture peut-on faire sur le point U et sur le triangle AUB lorsque M décrit un arc de cercle d'extrémités A et B ?
2) Démontrer cette conjecture et préciser la position de U.
3) Soit (Γ) un cercle de centre O, $[AB]$ une corde de (Γ) et N un point de $]AB[$. Construire un triangle ABC tel que $C \in (\Gamma)$ et tel que la bissectrice de $\widehat{ACB}$ passe par N.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

Q.1) Présenter la figure réalisée sur la calculatrice et l'animation permettant de mettre en évidence la conjecture.

Q.2) Dégager les propriétés mises en jeu dans la résolution de l'exercice et indiquer à quel niveau on peut le proposer.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

- Sa réponse à la question $Q.1$).
- plusieurs énoncés d'exercices, variés, de constructions de triangles vérifiant des conditions métriques ou géométriques.

Sujet du 21 Juillet

Thème : Outils
Le calcul vectoriel et la géométrie analytique

1. L'exercice proposé au candidat

On considère dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ le cercle Γ de centre O et de rayon 1.
Soit A le point de coordonnées $(1; 0)$ et soit A' le point de coordonnées $(-1; 0)$.

1) Pour tout point H du segment $[AA']$, distinct de A et A', on mène la perpendiculaire Δ à la droite (AA'). La droite Δ coupe le cercle Γ en M et M'. On pose $\overrightarrow{OH} = x\ \vec{i}$. Calculer, en fonction de x, l'aire du triangle AMM'.
2) Soit f la fonction numérique définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$. Dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que le triangle, AMM', d'aire maximale est équilatéral.

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes :

$Q.1$) Dégager les méthodes et les théorèmes utilisés dans cet exercice.

$Q.2$) Construire, à l'aide du module de géométrie d'une calculatrice, la figure proposée et conjecturer à l'aide de cette figure le résultat attendu.

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :

Deux exercices sur le thème : **« Le calcul vectoriel et la géométrie analytique. »**

Dossier N ° 1, 29 juin
Arithmétique

(extraits de programmes : Terminale S, spécialité)

La première question est une équation diophantienne classiquement étudiée en Terminale S (spécialité). La suite de l'exercice consiste à en rechercher les solutions positives.
Les candidats ont été gênés par la formulation de la question $Q.3$), et plus de la moitié d'entre eux ne l'ont en fait pas comprise.
Pour la première question, il est trop fréquent que les candidats s'abstiennent d'effectuer la preuve complète : comme ils ont procédé par condition nécessaire, on attend qu'ils s'inquiètent aussi de savoir si la condition trouvée est suffisante.
Pour l'algorithmique, c'est-à-dire pour la question $Q.2$), les candidats se sont souvent limités à programmer l'algorithme d'Euclide.
Il était très rare que les candidats présentent des exercices nécessitant l'utilisation d'une calculatrice ; ceci n'était pas explicitement demandé.
Enfin, ce dossier a été jugé très discriminant et relativement difficile.

Dossier N ° 2, 30 juin
Statistiques

(extraits de programmes : 4e, 3e, 1e ES, 1e S)

L'exercice proposé par le jury s'est révélé long, notamment à cause du nombre de questions posées. Par ailleurs, la nature du sujet laissait une large latitude d'initiative aux candidats (nature du travail demandé, niveau auquel se placer), ce à quoi ils sont peu habitués. Dire, au vu de l'exemple suggéré sur les cas de grippe, qu'il y en a beaucoup plus en hiver que dans les autres saisons ne semble pas, pour trop de candidats, avoir sa place dans une telle épreuve ; pourtant, le dossier est en cohérence avec l'évolution actuelle des programmes (« lecture de l'information chiffrée », voir classes de série L entre autres).
Le dossier a rempli son rôle et s'est révélé discriminant.
L'utilisation des calculatrices reste souvent insuffisamment maîtrisée, et a sans doute occupé trop de temps de préparation pour de nombreux candidats.
Le vocabulaire statistique élémentaire (médiane, moyenne, étendue, quartile, écart-type) est trop souvent méconnu voire inconnu de certains candidats.
Les exercices présentés par les candidats n'ont pas toujours été préparés en ce qui concerne leur résolution, et sont trop souvent démunis de présentation pédagogique.

Dossier N ° 3, 1er juillet
Suites

(extraits de programmes : 1e S, Terminale S)

La réponse à la première question (calcul de termes successifs à l'aide d'une calculatrice) pouvait être réalisée de manière minimale (entrée de valeurs particulières des paramètres et observations particulières correspondantes) ou bien en utilisant les possibilités du calcul formel. L'important pour le candidat était de manifester des aptitudes à illustrer et à observer le comportement des suites obtenues.
Pour la question $Q.2$), beaucoup de candidats ont cherché à tort une suite constante, au lieu de chercher deux suites géométriques (de raison non nécessairement nulle).
Le thème est large, et il était souhaité que les candidats proposent des exercices ne se limitant pas à des récurrences linéaires.

Dossier N ˚ 4, 2 juillet
Outils : les nombres complexes

(extraits de programmes : Terminale S)

L'impression générale est celle d'un dossier qui s'est révélé difficile à traiter dans le temps imparti. Il a été perçu comme long, et s'y ajoutait le travail demandé sur la calculatrice. La conséquence a été que la partie « choix d'exercices »a été particulièrement négligée, les exercices proposés n'étant pas assez travaillés.
Bien qu'une amélioration soit perçue par rapport à l'année dernière, l'usage de l'environnement géométrique des calculatrices reste encore trop souvent méconnu et l'animation a posé beaucoup de problèmes aux candidats.
Le plus inquiétant est la persistance des difficultés logiques rencontrées par les candidats dans l'établissement des équivalences que réclamait l'exercice.

Dossier N ˚ 5, 3 juillet
Problèmes de calcul de grandeurs. Calculs de longueurs, d'aires et de volumes

(extraits de programmes : 4e, 3e, Seconde)

Malgré un nombre élevé de questions dans l'exercice proposé par le jury (et de fait, peu de candidats ont traité la dernière question), ce dossier a bien rempli son rôle. Les candidats n'ont pas été déroutés par les calculs de longueurs. En revanche, la question $Q.2$) a rarement été traitée de manière satisfaisante.
Les exercices proposés par les candidats étaient divers ; certains candidats ont proposé des choix intéressants et variés, d'autres proposaient des choix pauvres, souvent limités à la géométrie plane ; il n'était pas explicitement demandé que parmi les exercices, l'un au moins concerne la géométrie à trois dimensions, mais l'absence totale était nécessairement un facteur limitant la richesse du choix du candidat.

Dossier N ˚ 6, 4 juillet
Problèmes d'optimisation

(extraits de programmes : 1e S)

Le dossier s'est révélé discriminant.
Sur l'exercice proposé par le jury, trop de candidats ont peiné dans les calculs, et n'ont pas abordé la dernière question. La recherche de l'axe de symétrie est souvent maladroite. Le rapport entre la fonction et le problème de maximisation n'est pas toujours perçu.
La question $Q.2$) du dossier appelait diverses réponses. Le candidat pouvait utiliser les possibilités du calcul formel ; rares sont ceux qui se sont lancés dans cette direction. La visualisation graphique était aussi prévue, à l'aide du module de géométrie.

Dossier N ˚ 7, 5 juillet
Techniques de dénombrement

(extraits de programmes : 1e STI, STL, SMS, Terminales STI, STL, SMS, S)

Sur l'exercice proposé par le jury, le fait que le contenu soit « concret »a conduit certains candidats à donner des solutions sans nécessairement savoir comment justifier la validité de leur réponse. La difficulté de la question Q3) a été assez généralement jugée excessive par les commissions, ce qui est un peu surprenant, s'agissant d'un problème extrêmement classique de combinatoire.
Les exposés des candidats ont été souvent assez pauvres et courts, de sorte que l'impression était celle d'un sujet peu discriminant. Mais cette impression ne concorde pas avec l'analyse

statistique des notes reçues par l'ensemble des candidats ayant composé ce jour. En effet, la dispersion de leurs notes est tout à fait dans la normale des dispersions observées les autres jours.
Certains candidats maîtrisant insuffisamment les concepts ou les connaissances fondamentales essayent de faire intervenir les probabilités, mais dans la confusion.
Les exercices proposés par les candidats sont très inégaux, et il est trop fréquent de voir échouer la résolution.
Pour ce dossier particulier, vu les réactions rencontrées, voici une proposition pour la solution complète de l'exercice proposé par le jury.

1 : À tout chemin possible on peut associer la succession des choix que l'on fait à chaque intersection rencontrée. Ces choix peuvent être codés par « E »(est) et « N »(nord), ces deux directions étant les seules répondant aux conditions proposées. Le chemin dessiné devient par exemple : « ENNNNEENEENENNE ». Il est évident que, vice-versa, la donnée de cette suite permet de connaître sans ambiguïté le chemin correspondant puisqu'à chaque intersection, on saura où se diriger. 2 : Les chemins ayant les points de départ et d'arrivée donnés ont tous en commun qu'il faut aller 8 fois vers le nord et 7 fois vers l'est. Dans le codage, on trouvera donc nécessairement sept fois « E »et 8 fois « N ». Donc tout codage est une suite de quinze symboles composée de 7 « E »et « N ». Vice-versa, à toute suite de quinze symboles composée de 7 « E »et 8 « N »correspond un unique chemin possible. Il apparaît ici en fait une bijection entre l'ensemble des chemins et l'ensemble des suites de 15 caractères dont 7 « E »et 8 « N ».
Le nombre des solutions est alors : $\binom{15}{7} = \binom{15}{8} = 6435$

3 : A chaque chemin on peut associer la longueur des parcours que l'on fait vers le nord dans chacune des avenues (orientées nord-sud) que l'on rencontre ou croise. Il y a 8 avenues possibles, visibles sur le dessin (les 7 pâtés de maison séparent ces 8 avenues), ce qui donnera, quel que soit le chemin, une suite de huit entiers naturels. Ainsi au chemin donné en exemple on peut associer la suite ; à partir de ce nouveau codage, on retrouvera l'ancien codage, ou directement le chemin comme suit :
– placer 0 « N »avant le premier « E », c'est-à-dire emprunter la 1e avenue rencontrée sur 0 pâtés, donc prendre la rue vers l'est jusqu'à l'avenue suivante ;
– placer 4 « N »entre le premier « E »et le second, c'est-à-dire emprunter la deuxième avenue sur 4 pâtés exactement vers le nord, puis prendre la rue atteinte vers l'est jusqu'à l'avenue suivante ;
– placer 0 « N »entre le second « E »et le troisième, c'est-à-dire emprunter la troisième avenue rencontrée sur 0 pâté, et prendre la rue vers l'est jusqu'à l'avenue suivante ;
– placer 1 « N »entre le troisième " E " et le quatrième, etc.
Ces instructions déterminent le chemin (ou la suite associée) de manière non ambiguë, puisque l'on sait pour chaque avenue rencontrée ce que l'on doit faire.
Les huit entiers naturels formant la suite ont obligatoirement pour somme 8, pour que le point d'arrivée soit bien celui demandé.
On trouve ici une bijection entre l'ensemble des suites de huit entiers naturels de somme 8 et celui des chemins. Le nombre cherché est donc le nombre de suites de huit entiers naturels de somme huit, cqfd.

Dossier N ° 8, 6 juillet
Equations, inéquations du premier et du second degré à une inconnue ou pouvant s'y ramener

(extraits de programmes : 5e, 4e, 3e, Seconde, 1e S)

Compréhension de l'exercice du jury : Les candidats ont eu des difficultés à situer le niveau où cet énoncé peut être proposé, certains y ont vu la résolution d'une équation diophantienne ; pour la plupart, ils ont effectué une mise en équation à deux inconnues et se sont concentrés sur la résolution du système.
Difficultés d'ordre pédagogique : Les questions sur la progression suivie en collège et au lycée dans le domaine relatif au dossier ne trouvent guère de réponses claires, et les candidats évaluent difficilement l'intérêt pédagogique de l'exercice proposé en fonction du niveau envisagé. *Difficultés d'ordre mathématique :* Les confusions et les lacunes remontent souvent à la logique élémentaire (statut d'une égalité, équivalence de systèmes, nature de l'ensemble auquel on s'intéresse). Les candidats peinaient à trouver un statut pour la deuxième équation redondante.
Exercices proposés par les candidats : Certains ne comportent aucune mise en équations, d'autres sont des « clones »de l'exercice du jury. On a quand même vu des exercices avec support géométrique, ou conduisant à une résolution graphique, ce qui était apprécié.

Dossier N ° 9, 7 juillet
Problèmes de construction

Constructions à l'aide de transformations (extraits de programmes : Seconde, 1e S, Terminale S)

On attendait des candidats qu'ils sachent présenter un raisonnement par analyse et synthèse, tout en mettant en évidence les transformations utilisées.
La synthèse est souvent omise, que ce soit dans la résolution de l'exercice du jury ou dans celle des exercices proposés par le candidat.
La question 1b) de l'exercice du jury est souvent établie à partir d'un long raisonnement sur des triangles isométriques alors que l'utilisation d'une réflexion était beaucoup plus claire et simple.
On regrette la faible utilisation des possibilités d'animation des figures.
Parmi les exercices proposés par les candidats, on rencontre trop souvent une mauvaise interprétation du thème, car ils s'arrêtent au mot transformation sans proposer de réel problème de construction.

Dossier N ° 10, 8 juillet
Outils. Le calcul vectoriel et la géométrie analytique

(extraits de programmes : 1e S, Terminale S)

Ce dossier, bien que l'exercice proposé par le jury comportât une étude de fonction numérique (au demeurant assez simple), n'était pas un dossier d'analyse. Autrement dit, l'étude de la fonction en question 2) n'était qu'un « à côté », les points centraux étant la manière de calculer les coordonnées des points M et M', l'aire du triangle, ainsi que l'identification d'un triangle équilatéral.
L'exercice s'est révélé assez facile, et presque tous les candidats savaient le résoudre. L'utilisation de la calculatrice a été globalement maîtrisée par une grande partie.
Les exercices proposés par les candidats ont été d'un intérêt très variable, et ne cadraient pas toujours bien avec l'intitulé du thème.

Dossier N ° 11, 12 juillet
Outils. Le calcul vectoriel et la géométrie analytique

(extraits de programmes : 1e S, Terminale S)

Ce dossier s'est révélé très ouvert, et la qualité des propositions d'exercices effectuées par les candidats était très variable, ce qui constituait un bon item d'évaluation.

Sur l'exercice du jury, on remarque que l'ensemble de la question 3) est très discriminant ; nombreux sont les candidats qui n'abordent pas cette question de manière géométrique, et se contentent de poser le système des deux équations (plan et sphère), ce qui ne peur permet pas de trouver la solution. Ceci est à relier avec les observations selon lesquelles trop de candidats n'ont même pas tenté de réaliser une figure.

Dossier N ˚ 12, 13 juillet
Probabilités conditionnelles

(extraits de programmes : 1e S, Terminales ES et S)

Le manque de variété des exercices proposés par les candidats a été particulièrement remarqué à l'occasion de ce dossier : l'étude de la fiabilité d'un test de dépistage d'une maladie apparaissait avec une fréquence impressionnante.
L'exercice proposé par le jury a été assez diversement traité, et il s'est révélé en fait fortement discriminant.
La question portant sur la généralisation à un polygone a permis - les concepteurs du dossier ne l'avaient en aucun cas fait exprès - la confusion entre le 4 de la formule de la dernière question de l'exercice et le 4 comme nombre de sommets du carré, de sorte que beaucoup de candidats, qui n'avaient pas correctement abordé cette question, se sont contentés de remplacer 4 par k...
La deuxième question appelait évidemment une résolution utilisant l'argument du rôle symétrique joué par les quatre sommets (toute autre méthode serait beaucoup plus longue, et passerait vraisemblablement par le résultat de la question suivante). Ceci s'est révélé difficile pour les candidats. Il n'était pas nécessaire de fournir de manière particulièrement formalisée la preuve de cette symétrie ; néanmoins une démonstration de l'égalité des quatre nombres pouvait être établie par récurrence en restant strictement dans le cadre des programmes.

Dossier N ˚ 13, 14 juillet
Outils : les barycentres

(extraits de programmes : 1e S, Terminale S)

La question $Q.2$), de caractère plus didactique, a été très peu abordée par les candidats. S'agissant de la résolution de l'exercice proposé par le jury, elle est réussie par peu de candidats.
Bien que les candidats connaissent et énoncent généralement les propriétés classiques du calcul barycentrique, ils ne sont en majorité pas capables d'appliquer ces propriétés à la résolution de l'exercice proposé. En particulier, l'associativité, souvent présentée comme généralité, n'est que rarement utilisée pour tenter de résoudre la question 2) de l'exercice du jury. Les candidats préfèrent une approche vectorielle, et tentent plus ou moins adroitement d'obtenir les réponses grâce à la relation de Chasles, ce qui les mène à des calculs lourds et qui n'aboutissent pas souvent.
Dans l'ensemble, ce sujet est apparu particulièrement difficile pour les candidats.

Dossier N ˚ 14, 15 juillet
Problèmes de constructions

(extraits de programmes : 1e S, Terminale S)

L'impression d'ensemble est nettement pessimiste.
L'exercice proposé par le jury reposait sur une méthode très claire d'analyse et synthèse, et était absolument dépourvu de pièges cachés. L'outil à utiliser, si l'on supposait la construction réalisée, était une similitude. Or les extraits de programmes fournis avec

le dossier étaient non ambigus à ce sujet. Pourtant les candidats, dans leur très grande majorité, n'arrivaient pas d'eux-mêmes à fournir une solution.
La question relative à la calculatrice a été souvent abordée, mais avec des résultats assez disparates.
Les difficultés rencontrées par les candidats sur l'exercice du jury ont contribué à une faiblesse notable de leurs propositions, malgré les avertissements qui sont donnés à tous lors de l'accueil.

Dossier N ° 15, 16 juillet La proportionnalité (extraits de programmes : 6e, 5e, 4e, 3e)

Ce dossier a été moins discriminant que la moyenne des autres. L'originalité de la présentation de l'exercice du jury a permis à certains candidats d'aborder l'aspect historique des mathématiques ; mais cela a aussi été source de difficultés pour certains candidats maîtrisant insuffisamment notre langue.
Le thème est une partie fondamentale des programmes de collège, et à ce titre il se justifie pleinement en tant que sujet de dossier. Du point de vue du contenu strictement mathématique, la pauvreté n'est qu'apparente, quand on constate que, d'une part, la relation liant la méthode de la fausse position à la linéarité n'est le plus souvent apparue aux candidats que pendant l'interrogation, et d'autre part, la question « l'assertion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d}$ est-elle vraie ? »a particulièrement dérouté les candidats.
S'il est vrai que ce dossier jouait sur une partie limitée des connaissances des candidats, il montre toute l'importance qu'il faut apporter à l'étude de ce thème. Les exercices proposés par les candidats ont été nombreux, mais trop souvent hors sujet ; il convenait aussi de se limiter au niveau du collège.

Dossier N ° 16, 17 juillet
Fonctions. Etude du comportement local
(extraits de programmes : 1e S, Terminale S)

Le sujet, assez classique, contenait un exercice accessible aux candidats, qui ont dans l'ensemble réussi à effectuer les calculs demandés. Mais ils ont souvent éprouvé des difficultés à énoncer de manière claire et rigoureuse les propriétés et théorèmes utilisés, qu'il s'agisse du théorème des valeurs intermédiaires ou du corollaire cité dans le programme de terminale S (cas d'une fonction strictement monotone). Sur la question Q1), les candidats présentent le plus fréquemment des outils, sans étudier les méthodes.
La manipulation de la calculatrice était dans l'ensemble assez satisfaisante ; cependant on en est resté le plus souvent à l'illustration des résultats par ailleurs trouvés, et non à l'utilisation pour émettre des conjectures.
Le thème proposé, version large (« les fonctions ») laissait une grande liberté de choix aux candidats, et allait bien au-delà de l'étude des comportements locaux. Cela ne les a malgré tout pas conduits, dans l'ensemble, à utiliser toute l'amplitude du thème, et leurs choix ont souvent été jugés peu variés.

Dossier N ° 17, 18 juillet
Intégration. Calcul d'intégrales par des méthodes variées
(extraits de programmes : Terminale S)

Très peu de candidats arrivent à proposer une résolution de la question Q2) par des méthodes accessibles à des élèves de terminale. De façon générale, les candidats n'ont pas

prêté assez attention aux extraits de programmes, et ils proposent des exercices utilisant explicitement la technique du changement de variables.
Le calcul intégral, pour les candidats se résume trop souvent au calcul de primitives, malgré les présentations qui en sont données actuellement en terminale S, et l'existence de l'intégrale présuppose généralement la continuité de la fonction, de sorte que le calcul de l'intégrale de la fonction entière, par exemple, semble impossible.

Dossier N ˚ 18, 19 juillet
Divers types de raisonnement (par l'absurde, par récurrence ...)

(extraits de programmes : 1e S, Terminale S)

Pour ce dossier, nous proposons d'abord une solution de l'exercice du jury.

(1) L'ensemble n'étant pas vide, on applique la proposition au couple (a, a) où a est élément de A . Cela donne $2 \in A$.
(2) Supposons que A contient un entier impair. En tant que partie finie non vide de l'ensemble des entiers naturels, la partie formée des éléments impairs de A possède un plus grand élément $n = 2k + 1$. L'application de la proposition au couple $(n, 2)$ donne $2k + 3 \in A$ puisque $(n, 2)$ sont premiers entre eux. Ceci contredit le fait que n soit le plus grand élément de A . (3) Supposons que A contient un entier autre que 2. En tant que partie finie non vide de l'ensemble des entiers naturels, la partie formée des éléments de A autres que 2 possède un plus petit élément, qui sera pair d'après le résultat de la question (2). Soit $a = 2b$ cet entier. L'application de la proposition au couple $(a, 2)$ donne $b + 1$ puisque le plus grand commun diviseur de $(a, 2)$ est 2. On a nécessairement $a \geqslant 4$, d'où $b \geqslant 2$ ce qui implique $b + 1 < 2b = a$. Ceci contredit l'hypothèse selon laquelle $a = 2b$ est le plus petit élément de A autre que 2.

Le sujet a été reçu avec un grand intérêt par l'ensemble du jury. La question 3 de l'exercice du jury n'a été que rarement résolue par les candidats. La confusion entre négation et contraposée reste très répandue. Les raisonnements par récurrence ont été préférés aux arguments par maximalité/minimalité, pourtant plus adaptés à cet exercice. La méconnaissance de la logique élémentaire est également souvent relevée.
Les exercices proposés par les candidats sont souvent non pertinents, ou bien se réduisent à des applications extrêmement simples du cours. Dans l'ensemble, les réactions des candidats ont été très « normales », ainsi que l'évaluation par le jury, alors que les auteurs du dossier craignaient que celui-ci paraisse anormalement difficile, ce qui n'a pas été le cas.

Dossier N ˚ 19, 20 juillet
Problèmes de constructions

(extraits de programmes : 5e, 4e, 3e, Seconde)

L'exercice proposé par le jury se situait délibérément à un niveau de collège ou de seconde ; il s'appuyait essentiellement sur le théorème dit de l'angle inscrit. La rédaction de la réponse à la question Q1) pouvait se limiter à l'observation de l'invariance du point U d'intersection lorsque l'on déplace le point M, la conjecture étant donc que ce point est fixe. Malgré le lien étroit de cet exercice avec un théorème fondamental, beaucoup de candidats échouaient à le résoudre par eux-mêmes. En revanche, la maîtrise du logiciel de géométrie dynamique était dans l'ensemble assez bonne.
Les exercices proposés par les candidats étaient trop souvent mal choisis, l'instruction « exercices [..] de construction de triangles vérifiant des conditions métriques ou géométriques »n'ayant pas apparemment été bien prise en compte.

Dossier N ˚ 20, 21 juillet
Equations différentielles
(extraits de programmes : 1e STI, Terminales STI et S)

La question $Q.2$) conduisait à l'emploi de la méthode d'Euler, seule méthode d'approximation des solutions d'une équation différentielle mentionnée dans les programmes, et donc seule à pouvoir être utilisée dans ce cadre. Les extraits de programmes adjoints au dossier étaient particulièrement précis à ce sujet.
Les candidats qui avaient résolu correctement le problème posé n'ont pas toujours compris ce qui était attendu dans cette question, et se contentaient de proposer un tracé graphique simple de la solution trouvée. Souvent, en fait, ils ignoraient ce qu'est la méthode d'approximation d'Euler.

IV. CONCLUSION

Le travail d'un jury de concours tel que celui-ci a des répercussions importantes et durables si l'on considère qu'il s'agit de recruter les futurs enseignants de collège et de lycée. A côté d'autres voies d'accès adaptées aux personnels déjà en situation d'enseignant, mais d'importance numérique moindre, le concours externe « donne le ton » pour les jeunes étudiants en ce qui concerne les exigences attendues en matière de recrutement.

La situation actuelle en matière de ratio candidats/postes permettait tout à la fois de maintenir un niveau d'exigence raisonnable et de pourvoir tous les postes. En ce sens elle est satisfaisante. Il n'en reste pas moins que d'importantes inquiétudes se font jour ; les effectifs présents en licence de mathématiques sont souvent fortement orientés à la baisse, et en revanche, les prochaines années verront de nombreuses fins de carrière chez les enseignants.
Il n'est pas dans les missions d'un président de jury d'étudier, et de confirmer ou d'infirmer ces prévisions. Il lui est toutefois permis de s'inquiéter du fait que, comme il est dit plus haut, pour *attirer* de nouveaux candidats, il semble bien qu'il faille plusieurs années. Les effectifs de candidats paraissent en effet suivre l'évolution du nombre des postes, mais avec environ quatre années de retard.
Aussi doit-on attirer l'attention sur le fait que le calcul du nombre de postes offerts doit prendre en compte cette réactivité non immédiate du public, sinon on risque de perpétuer voir d'aggraver les distorsions de la pyramide des âges dans le corps enseignant, distorsions fâcheuses à tous points de vue, depuis la bonne prise en compte de la formation continue (la situation qui prévaut depuis un certain temps, avec une grande masse de professeurs en fin de carrière, n'est pas favorable à une prise en compte aisée des évolutions nécessaires) jusqu'aux inégalités en qualité de recrutement qui en résultent (un ratio trop faible candidats/postes ne peut qu'induire un recrutement de qualité moindre, et à l'inverse un ratio trop élevé laisse perdre des vocations de qualité).

L'introduction des TICE dans un concours de cette taille se heurte à de nombreux obstacles, qui n'ont pas permis la mise en œuvre d'une épreuve sur ordinateur. Pour y suppléer en partie, l'utilisation pendant les épreuves orales de calculatrices performantes a été fortement encouragée ces dernières années. La rénovation des matériels est devenue effective et à peu près continue depuis l'introduction de prêts gracieux par les constructeurs. L'introduction de tablettes de rétroprojection a suivi. Le nombre des sujets de première épreuve pour lesquels l'utilisation d'une calculatrice est encouragé ou imposé s'est accru, et en réponse, le taux d'utilisation par les candidats augmente de manière significative. Concernant l'épreuve sur dossier, le fait que l'utilisation des calculatrices y est rendue explicite pour une partie d'entre eux, jointe au fait que le candidat se voit proposer un dossier unique, a considérablement renforcé la place des TICE.

L'évolution des sujets doit suivre celle des programmes ; cependant, le choix proposé aux candidats a pour effet un délaissement de certaines parties des programmes « *mal-aimées* » par les candidats voire par les formateurs. Ceci contredit une évolution raisonnablement rapide des sujets réellement traités (et donc préparés) par les candidats. Pour être en mesure de piloter avec efficacité ces évolutions nécessaires, il faut se séparer de tel ou tel sujet qui, bien qu'indiscutablement intéressant sur le plan de la discipline, a perdu son importance dans les programmes de l'enseignement secondaire, et introduire sans délai les innovations. La suppression du choix laissé aux candidats lors de la seconde épreuve visait à faciliter ces transformations en continu.

Je tiens à remercier tous les membres du jury pour leur disponibilité et pour la motivation dont ils ont fait preuve afin de réussir une session satisfaisante à tous points de vue.

Je tiens également à remercier aussi tous nos partenaires, les éditeurs qui ont donné des manuels, les constructeurs de calculatrices Texas Instruments et Casio qui ont prêté du matériel, je salue le retour de la firme Hewlett-Packard, prévu pour l'an prochain, les universités qui ont prêté des livres, M. le Proviseur du Lycée Lakanal et toute son équipe, qui nous accueille, le SIEC qui nous prête des rétroprojecteurs, pour leur efficacité et leur soutien.

V. ANNEXES

5.1 Bibliothèque du C.A.P.E.S.

5.1.1 Programmes (documents disponibles dans les salles de préparation, utilisables pour les deux épreuves orales)

B.O. hors série n°2 du 30/08/01 : Programme de seconde générale et technologique.
B.O. hors série n°8 du 31/08/00 : Programme de Première ES.
B.O. hors série n°7 du 31/08/00 : Programme de mathématiques-informatique, Première L.
B.O. hors série n°3 du 31/08/01 : Programme pour l'option facultative, Première L.
B.O. hors série n°7 du 31/08/00 : Programme de Première S.
B.O. spécial 2 du 02/05/91 : Programme de 1ère SMS, STI (sauf spécialités "Arts appliqués" et "Génie optique") et STL.
B.O. hors série n°8 du 02/10/97 : Programme de 1ère STI spécialités "Arts appliqués" et "Génie optique".
B.O. hors série du 24/09/92 : Programme de 1ère STT (tome III, brochure 1).
B.O. hors série n°4 du 30/08/01 : Programme de Terminale ES.
B.O. hors série n°3 du 30/08/01 : Programme pour l'option facultative de Terminale L.
B.O. hors série n°4 du 30/08/01 : Programme de Terminale SMS, STI, STL et STT.
B.O. spécial n°8 du 07/07/94 : Programme de Terminale STI (sauf spécialités "Arts appliqués" et "Génie optique").
B.O. hors série n°8 du 02/10/97 : Programme de Terminale STI spécialités "Art appliqués" et "Génie optique".
B.O.E.N. spécial n°8 du 07/07/94 : Programme de Terminale SMS.

5.1.2 Ouvrages disponibles (seulement pour l'épreuve sur dossier)

Ouvrages généraux

NIVEAU	SERIE	TITRE	REM	AUTEURS	ANNEE	EDITEUR
COL		ENSEIGNER LA GEOMETRIE		COUSIN-FAUCONNET	1995	ARMAND COLIN
COL		LE CALCUL LITTERAL			1999	IREM
COL		PETIT X N°44			1996	IREM
COL		PETIT X N°4			1984	IREM
COL		GESTION DE DONNEES ET STAT			1997	IREM
COL		PETIT X N°40			1995	IREM
COL		DES CHIFFRES ET DES LETTRES			1991	IREM
COL		AUTOUR DE THALES			1995	IREM
LYC		ENSEIGNER LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE N°99			1995	APMEP
LYC		L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES		ROBERT,LATTUATI ,PENNINCKX	1999	ELLIPSES
LYC		GEOMETRIE		GAUTIER,COLOMB …	1999	ELLIPSES
LYC		MATHS ET SCIENCES ECO ET SOCIALES			1996	IREM
LYC		POUR UNE PRISE EN COMPTE DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES EN			1998	IREM

		ANALYSE				
LYC		FAIRE DES MATHS AVEC DES CALCULATRICES SYMBOLIQUES		TROUCHE	1998	IREM
LYC		LA GEOMETRIE PLANE			1989	IREM
LYC		MATHS ET FILIERE ECO ET SOCIALE			1996	IREM
LYC		AIMER FAIRE DES MATHS 3			1996	IREM
LYC		AIMER FAIRE DES MATHS 4			1997	IREM
LYC		AIMER FAIRE DES MATHS 5			1998	IREM
GEN	SHAUM	THEORIE ET APPLICATIONS DE LA STATISTIQUE		MURRAY R.SPIEGEL	1972	MC GRAW-HILL
GEN		LE NOMBRE PI		ADCS	1992	ACDS
GEN		HISTOIRE D'ALGORITHMES:DU CAILLOU A LA PUCE		CHABERT,BARBIN …	1993	BELIN
GEN		ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES			1989	CRDP
GEN		COURS DE CALCUL DES PROBABILITES		CALOT	1967	DUNOD
GEN		STATISTIQUE DESCRIPTIVE-TD	(APPLICATIONS EXCEL)	MONINO,KSIANSKI, LE CORNU	2000	DUNOD
GEN		EXERCICES DE CALCUL DES PROBABILITES		CALOT	1986	DUNOD
GEN		LES OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES:REFLEXES ET STRATEGIES		BELHAJ SOULAMI	1999	ELLIPSES
GEN		GEOMETRIE		CARRAL	1995	ELLIPSES
GEN		TOPOLOGIE GENERALE ET ANALYSE FONCTIONNELLE		SCHWARTZ	1970	HERMANN
GEN		METHODES MATHS POUR LES SCIENCES PHYSIQUES		SCHWARTZ	1965	HERMANN
GEN		GROUPES ET GEOMETRIES		SENECHAL	1979	HERMANN
GEN		METHODES MODERNES EN GEOMETRIE		FRESNEL	1996	HERMANN
GEN		APPROXIMATION ET OPTIMISATION		LAURENT	1972	HERMANN
GEN		LA GEOMETRIE DU TRIANGLE		SORTAIS	1994	HERMANN
GEN		ABREGE D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES		DIEUDONNE	1986	HERMANN
GEN		CALCUL INFINITESIMAL		DIEUDONNE	1980	HERMANN
GEN		GEOMETRIE DE L'ESPACE ET DU PLAN		SORTAIS	1988	HERMANN
GEN		AUX ORIGINES DU CALCUL INFINITESIMAL		CERCLE D'HISTOIRE DES SCIENCES	1999	IREM
GEN		POURQUOI PAS DES MATHEMATIQUES			2000	IREM
GEN		ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES 1			1999	IREM
GEN		PROBLEME DE MISE EN EQUATIONS			1996	IREM
GEN		DES STATISTIQUES A LA PENSEE STATISTIQUE			2001	IREM
GEN		ANGLES ROTATIONS			1993	IREM
GEN		APPORTS DE L'OUTIL INFO…A LA GEOMETRIE			1994	IREM
GEN		LE VRAI ET LE FAUX		GANDIT	2001	IREM
GEN		ALGORITHMIQUE &TRADUCTION POUR CALCULATRICES		DE GRAEVE	2001	IREM
GEN		RALLYE:PRÊT A AFFRONTER L'EPREUVE DE MATH			1998	IREM
GEN		HISTOIRE DES MATHS POUR NOS CLASSES			1991	IREM
GEN		INITIATION A LA CRYPTOLOGIE		COHEN,OLIVIER	2000	IREM
GEN		LA JUBILATION EN MATHS		DELEDICQ	2001	IREM
GEN		POURQUOI AIMER ENCORE FAIRE DES MATHS			1994	IREM
GEN		FRAGMENTS D'ARITHMETIQUE			1999	IREM
GEN		UNE HISTOIRE DE CONIQUES			1996	IREM
GEN		ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES 2			1999	IREM
GEN		SIMILITUDES			1999	IREM
GEN		INITIATION A L'ARITHMETIQUE			1999	IREM
GEN		MATHS:APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES TOME 2			1990	IREM
GEN		INFO-MATHIC:ACTIVITES MATHS DANS UN ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE			1998	IREM
GEN		MATHS:APPROCHE PAR DES TEXTES			1986	IREM

		HISTORIQUES				
GEN		MATHS:APPROCHE PAR DES TEXTES HISTORIQUES TOME 3			2001	IREM
GEN		AIMER ENCORE FAIRE DES MATHS 2			1995	IREM
GEN		EXERCICES DE GEOMETRIE ELELMENTAIRE		TRUFFAULT	1996	IREM
GEN		AIRES			2000	IREM
GEN		LES CONIQUES			1997	IREM
GEN		COURS DE GEOMETRIE ELEMENTAIRE		TRUFFAULT,VOGEL	1995	IREM
GEN		ENSEIGNER L'ARITHMETIQUE			2000	IREM
GEN		LA RECURSIVITE EN GEOMETRIE:LES FRACTALS		CUPPENS	1986	IREM
GEN		MATHEMATIQUES AU FIL DES AGES		GROUPE EPISTEMOLOGIE ET HISTOIRE	1987	IREM
GEN		METHODES DE MATHS ET PROGRAMMATION		NIZARD	1988	LAVOISIER TEC &DOC
GEN		ELEMENTS D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES		BOURBAKI	1984	MASSON
GEN		METHODES NUMERIQUES		BAKHVALOV	1976	MIR MOSCOU
GEN		RECUEIL D'EXERCICES ET DE PROBLEMES D'ANALYSE MATHEMATIQUES		DEMIDOVITCH	1965	MIR MOSCOU
GEN		EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES		CLERO	1990	NATHAN
GEN		PROBABILITES ET INFERENCE STATISTIQUE		ABBOUD,AUDROING	1989	NATHAN
GEN		DICTIONNAIRE DES MATHEMATIQUES		BOUVIER,GEORGE,LE LIONNAIS	1996	PUF
GEN		SUITES ET SERIES		COMBES	1982	PUF
GEN		ALGEBRE LINEAIRE ET APPLICATIONS TOME 1		MASCART,STOKA	1984	PUF
GEN		ALGEBRE LINEAIRE ET APPLICATIONS TOME 2		MASCART,STOKA	1985	PUF
GEN		LE CALENDRIER		COUDERC	1986	QUE SAIS-JE?
GEN		LES NOMBRES ET LEURS MYSTERES		WARUSFEL	1961	SEUIL
GEN		STATISTIQUE ET CALCUL DES PROBABILITES		MASIERI	1988	SIREY
GEN		LE CERCLE D'EULER		COLLET,GRISO	1987	VUIBERT
GEN		DICTIONNAIRE DES MATHEMATIQUES		BOUVIER GEORGE LE LIONNAIS	1996	PUF
GEN		ENSEIGNER LES STATS DU CM A LA SECONDE.POURQUOI?COMMENT?			1998	IREM

Ouvrages d'enseignement supérieur

SUP	1erCYCLE	LES MATHEMATIQUES DE A A Z		LARROCHE,LAURENT	2002	DUNOD
SUP	1erCYCLE	LES SERIES		DELMER	1995	DUNOD
SUP	2ème ANNEE	BEST OF MATHEMATIQUES:LES MEILLEURS SUJETS DE CONCOURS		BOUTILLON	2000	DUNOD
SUP	2ème CYCLE	CALCUL DIFFERENTIEL ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES		AZE,CONSTANS,HIRIART-URRUTY	2002	DUNOD
SUP	2ème CYCLE	THEORIE DES GROUPES		DELCOURT	2001	DUNOD
SUP	2ème CYCLE	INTRODUCTION A LA LOGIQUE		DAVID,NOUR,RAFFALLI	2001	DUNOD
SUP	2ème CYCLE, AGREG, EI	ANALYSE NUMERIQUE		HERON,PICARD,ISSARD-ROCH	1999	DUNOD
SUP	2ème CYCLE, AGREG, EI	PROCESSUS STOCHASTIQUES:PROCESSUSDE POISSON,CHAINES DE MARKOV ET MARTINGALES		FOATA,FUCHS	2002	DUNOD
SUP	2ème CYCLE, EI	CALCUL DIFFERENTIEL POUR LA LICENCE		DONATO	2000	DUNOD
SUP	2ème CYCLE, EI	CALCUL SCIENTIFIQUE		SAINSAULIEU	2000	DUNOD
SUP	2ème	ANALYSE NUMERIQUE ET EQUATIONS AUX		NICAISE	2000	DUNOD

	CYCLE, EI	DERIVEES PARTIELLES				
SUP	2èmeCYCLE	STATISTIQUE INFERENTIELLE		FOURDRINIER	2002	DUNOD
SUP	2èmeCYCLE	ELEMENTS D'INTEGRATION ET D'ANALYSE FONCTIONNELLE		EL KACIMI ALAOUI	1999	ELLIPSES
SUP	2èmeCYCLE,EI, AGREG	ANALYSE ET GEOMETRIE:METHODES HILBERTIENNES		ROOS	2002	DUNOD
SUP	AGREG	COURS D'ANALYSE:ANALYSE REELLE ET INTEGRATION		DOUKHAN,SIFRE	2001	DUNOD
SUP	AGREG	COURS D'ALGEBRE		TAUVEL	1999	DUNOD
SUP	AGREG	TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLE		GONNORD,TOSEL	1996	ELLIPSES
SUP	AGREG	LECONS D'ALGEBRE(PREPARATION A L'ORAL)		MADERE	1998	ELLIPSES
SUP	AGREG	CALCUL DIFFERENTIEL(THEMES D'ANALYSE)		GONNORD,TOSEL	1998	ELLIPSES
SUP	AGREG	COURS D'ALGEBRE		PERRIN	1996	ELLIPSES
SUP	AGREG	MODELISATION A L'ORAL DE L'AGREG:CALCUL SCIENTIFIQUE		DUMAS	1999	ELLIPSES
SUP	AGREG	THEMES D'ANALYSE		EXBRAYAT,ALESSANDRI	1997	MASSON
SUP	AGREG	ALGEBRE POUR L'AGREGATION INTERNE		TAUVEL	1996	MASSON
SUP	AGREG	ELEMENTS D'ANALYSE		ZUILY,QUEFFELEC	1995	MASSON
SUP	ANNEES1&2	MATHEMATICA		COOMBES ET AL.	2000	DUNOD
SUP	ANNEES1&2	SYSTEME D - ANALYSE		SOROSINA	1999	DUNOD
SUP	CAPES	EPREUVE ORALE D'EXPOSE:33 LECONS POUR SE PREPARER EFFICACEMENT		BAJOU,SAINT-LANNES,SORBE	2003	DUNOD
SUP	CAPES	GEOMETRIE AFFINE ET EUCLIDIENNE		DELODE	2000	DUNOD
SUP	CAPES	ANALYSE ET PROBAS:ECRITS 1996-97(avec rappels de cours)		CHRISTOL,DECOMPS-GUILLOUX,PIQUET	1999	DUNOD
SUP	CAPES	ALGEBRE ET GEOMETRIE:ECRITS 1996-99(avec rappels de cours)		BORIES-LONGUET,JARRAUD	1999	DUNOD
SUP	CAPES	NOS 20 SUJETS PREFERES		BORIS-LONGUET,DECOMPS-GUILLOUX,JARRAUD,MELEARD,PIQUET	2000	DUNOD
SUP	CAPES	L'EPREUVE SUR DOSSIER A L'ORAL:GEOMETRIE		ROBERT	1995	ELLIPSES
SUP	CAPES	L'EPREUVE SUR DOSSIER A L'ORAL:ANALYSE		LAMBRE	1998	ELLIPSES
SUP	CAPES	ALGEBRE ET GEOMETRIE:ECRITS 1991-96(avec rappels de cours)		BORIES-LONGUET,JARRAUD,LEVY-BRUHL	1997	MASSON
SUP	CAPES	ANALYSE ET PROBAS:ECRITS 1991-96(avec rappels de cours)		MELEARD,PIQUET,DECOMPS-GUILLOUX	1997	MASSON
SUP	CAPES	ANALYSE(avec rappels de cours)		LEVY-BRUHL,PIQUET,SERVIEN,VAUTHIER	1987	MASSON
SUP	CAPES	ALGEBRE ET GEOMETRIE		LEVY-BRUHL,PIQUET,SERVIEN,VAUTHIER	1987	MASSON
SUP	CAPES	34 PB CORRIGES POSES A L'ECRIT DU CAPES		CHEVALLET	1999	VUIBERT SUP
SUP	CAPES & AGREG	STRUCTURES ALGEBRIQUES EN GEOMETRIE		AIME	1999	ELLIPSES
SUP	CAPES & AGREG	GEOMETRIE:COURS ET EXERCICES CORRIGES		BIGARD	1998	MASSON
SUP	CAPES & AGREG	ALGEBRE LINEAIRE(COURS ET EXERCICES)		ROUDIER	2003	VUIBERT
SUP	CAPES & AGREG INTERNE	COMPLEMENTS D'ALGEBRE ET DE GEOMETRIE		DE BIASI	2000	ELLIPSES
SUP	CAPES & AGREG INTERNE	MATHEMATIQUES POUR LE CAPES ET L'AGREG INTERNE		DE BIASI	1998	ELLIPSES
SUP	CAPES	MATHEMATIQUES POUR LE CAPES		DE BIASI	1995	ELLIPSES

	&AGREG INTERNE	ET L'AGREG INTERNE				
SUP	CNAM	INITIATION A L'ANALYSE NUMERIQUE		THEODOR	1989	MASSON
SUP	CYCLES 1&2,EI	TOUTES LES MATHEMATIQUES		STÖCKER	2002	DUNOD
SUP	DEUG	MATHEMATIQUES		DELMER	1996	DUNOD
SUP	DEUG	FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES ET INTEGRATION		DELMER	1997	DUNOD
SUP	DEUG 1	EXERCICES D'ANALYSE:CALCUL INTEGRAL		BOSCHET	1997	MASSON
SUP	DEUG A1	ENSEIGNER AUTREMENT LES MATHEMATIQUES			1990	IREM
SUP	DEUG MIAS/MASS	ALGEBRE GENERALE,TD		DENMAT,HEAULME	2000	DUNOD
SUP	DEUG MIAS/MASS	BEST OF ANALYSE 1èreANNEE		PARZYSZ	2001	DUNOD
SUP	DEUG MIAS/MASS/SM	ALGEBRE 1èreANNEE		LIRET,MARTINAIS	1997	DUNOD
SUP	DEUG MIAS/MASS/SM	ANALYSE 1èreANNEE		LIRET,MARTINAIS	1997	DUNOD
SUP	DEUG MIAS/MASS/SM	ANALYSE 2èmeANNEE		LIRET,MARTINAIS	1998	DUNOD
SUP	DEUG MIAS/MASS/SM	ANALYSE 2èmeANNEE		PROCHASSON	2000	DUNOD
SUP	DEUG MIAS/MASS/SM	ALGEBRE ET GEOMETRIE 2èmeANNEE		PROCHASSON	2001	DUNOD
SUP	DEUG SVT	ANALYSE		BLONDEL	2000	DUNOD
SUP	DEUG1	EXERCICES D'ANALYSE:176 EXERCICES ET 105 TESTS CORRIGES(avec rappels de cours)		SCHMITT	1997	MASSON
SUP	DEUG1	FONCTIONS D'UNE VARIABLE		CALVO	1997	MASSON
SUP	DEUG1 SM	COURS DE MATHEMATIQUES		DIXMIER	1976	GAUTHIER-VILLARS
SUP	DEUG2 SM	COURS DE MATHEMATIQUES		DIXMIER	1977	GAUTHIER-VILLARS
SUP	LICENCE	ALGEBRE 3èmeANNEE		SCHWARTZ	2003	DUNOD
SUP	LICENCE	TOPOLOGIE ET ANALYSE		SKANDALIS	2001	DUNOD
SUP	LICENCE 1 MIAS/MASS/SM	ALGEBRE 1èreANNEE		LIRET,MARTINAIS	2003	DUNOD
SUP	LICENCE 1 MIAS/MASS/SM	ANALYSE 1èreANNEE		LIRET,MARTINAIS	2003	DUNOD
SUP	LICENCE 3,MASTER1,EI	INTRODUCTION A L'ANALYSE NUMERIQUE:APPLICATIONS SOUS MATLAB		BASTIEN,MARTIN	2003	DUNOD
SUP	LICENCE1 MIAS/MASS/SM	LES MATHEMATIQUES EN LICENCE TOME1		AZOULAY,AVIGNANT,AULIAC	2003	EDISCIENCE
SUP	MAITRISE	INTRODUCTION A L'ANALYSE NUMERIQUE MATRICIELLE ET A L'OPTIMISATION		CIARLET	1988	MASSON
SUP	MAITRISE	INTRODUCTON A L'ANALYSE NUMERIQUE DES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES		RAVIART,THOMAS	1988	MASSON
SUP	MASTER,EI	SIMULATION NUMERIQUE EN C++		DANAILA,HECHT,PIRONNEAU	2003	DUNOD
SUP	MASTER1&2,AGREG	INTRODUCTION A LA THEORIE SPECTRALE		LEVY-BRUHL	2003	DUNOD
SUP	MP	L'ORAL(ENTRAINEMENT AUX CONCOURS		MONIER	2002	DUNOD
SUP	PREPA	ANALYSE 1-COURS TOME 1		MONIER	1997	DUNOD

	1					
SUP	PREPA 1	ANALYSE 2-COURS TOME 2		MONIER	1996	DUNOD
SUP	PREPA 1	ALGEBRE 1		MONIER	2000	DUNOD
SUP	PREPA 1&2	GEOMETRIE		MONIER	2000	DUNOD
SUP	PREPA 2	ALGEBRE 2 -COURS TOME 6		MONIER	1998	DUNOD
SUP	PREPA 2	ANALYSE-TOME 3		MONIER	1997	DUNOD
SUP	PREPA 2	ANALYSE4-TOME 4		MONIER	1997	DUNOD
SUP	PREPA1	ALGEBRE 1-COURS TOME 5		MONIER	1996	DUNOD
SUP	PREPA1 &2	GEOMETRIE-TOME7		MONIER	1997	DUNOD
SUP	PREPA2	MATHEMATIQUES 2ème ANNEE		DESCHAMPS,WARUSFEL...	2001	DUNOD
SUP	PREPA2	ANALYSE 3-COURS TOME 3		MONIER	1997	DUNOD
SUP	STS-IUT	SERIES DE FOURIER,TRANSFORMATION DE LAPLACE		BENICHOU,BOY,POUGET	1995	ELLIPSES
SUP		ANALYSE		BLONDEL	2000	DUNOD
SUP		LE NOMBRE D'OR ET LES NOMBRES DE FIBONACCI		MEYER STEYAERT	1981	IREM
SUP		PROBAS ET STATS			1996	IREM
SUP		L'ENSEIGNEMENT DES STATS ET PROBAS			1999	IREM
SUP		RMS			1998/99	VUIBERT

Manuels scolaires

6		DECIMALE			1996	BELIN
6		MATH ET CLIC			2000	BORDAS
6		NUL EN MATHS ?			1997	BORDAS
6		MATHS			1996	BORDAS
6		MATH ET CLIC	PROF		2000	BORDAS
6		DIMATHEME			2000	DIDIER
6		100 PROBLEMES SANS PEINE			1998	HACHETTE
6		CINQ SUR CINQ			1994	HACHETTE
6		ALPHA			1994	HATIER
6		TRIANGLE			96/00	HATIER
6		DOCUMENTS D'ACCOMPAGNEMENT			1996	M.E.N.
6		TRANSMATH			1996	NATHAN
5		DECIMALE			1997	BELIN
5		MATHS JAUNE			1997	BORDAS
5		MATHEMATIQUES		SERRA	2001	BORDAS
5		MATHEMATIQUES	PROF	CORRIEU BATIER		DELAGRAVE
5		DIMATHEME			1997	DIDIER
5		DIMATHEME			2001	DIDIER
5		CINQ SUR CINQ			97/00	HACHETTE
5		NOUVEAU PYTHAGORE	PROF		1997	HATIER
5		TRIANGLE	PROF		1997	HATIER
5		TRANSMATH			1997	NATHAN
5		TRANSMATH	PROF		2001	NATHAN
4		DECIMALE			1998	BELIN
4		MATHEMATIQUES			1998	BORDAS
4		MEDIAMATH			2002	BORDAS
4		METHODES EN PRATIQUE			1988	CRDP
4		DIMATHEME			1998	DIDIER
4		DIMATHEME			2002	DIDIER
4		TOUT SIMPLEMENT			1998	HACHETTE
4		CINQ SUR CINQ			2002	HACHETTE
4		CINQ SUR CINQ			1998	HACHETTE
4		DIABOLO			2003	HACHETTE
4		TRIANGLE			1998	HATIER
4		NOUVEAU PYTHAGORE			1998	HATIER
4		TOUT LE PROGRAMME EN 300			1997	HATIER

		EXERCICES				
4		SUIVI SCIENTIFIQUE		IREM	1988	INTER IREM
4		NOUVEAU TRANSMATH	PROF		1998	NATHAN
4		TRANSMATH	PROF		2002	NATHAN
4		TRANSMATH			1988	NATHAN
3		COMPRENDRE ET REUSSIR			1997	BELIN
3		METHODES EN PRATIQUE			1989	CRDP
3		DIMATHEME			1999	DIDIER
3		CINQ SUR CINQ	PROF		2003	HACHETTE
3		CINQ SUR CINQ			1999	HACHETTE
3		TOUT SIMPLEMENT			1999	HACHETTE
3		NOUVEAU PYTHAGORE	PROF		1999	HATIER
3		TRIANGLE			1999	HATIER
3		TRIANGLE	PROF		2003	HATIER
3		SUIVI SCIENTIFIQUE		IREM	1989	INTER IREM
3		MATHEMATIQUES			1999	BORDAS
3		DIABOLO			2004	HACHETTE
2		MATHEMATIQUES			1998	BELIN
2		INDICE			2000	BORDAS
2		MATHEMATIQUES	PROF		2000	BREAL
2		MATHEMATIQUES			2000	BREAL
2		MODULOMATH			2004	DIDIER
2		DIMATHEME			2000	DIDIER
2		REPERES			2004	HACHETTE
2		PYRAMIDE			2000	HACHETTE
2		DECLIC			1998	HACHETTE
2		SIGMATH			1998	HATIER
2		ENONCES ET SCENARIOS			1993	INTER IREM
2		LIAISON COLLEGE SECONDE			1990	INTER IREM
2		HYPERBOLE			2000	NATHAN
2		TRANSMATH			2000	NATHAN
2		PHYSIQUE	PHYSIQUE	DURRANDEAU	2000	HACHETTE
1	ES	FRACTALE	OBLIG		1998	BORDAS
1	ES	FRACTALE	OPT		1998	BORDAS
1	ES	MATHEMATIQUES			2001	BREAL
1	ES	DIMATHEME	OBLIG		2001	DIDIER
1	ES	DIMATHEME	OPT		2001	DIDIER
1	ES	DECLIC			2001	HACHETTE
1	ES	TRANSMATH			1998	NATHAN
1	ES	TRANSMATH			2001	NATHAN
1	ES	HYPERBOLE			2001	NATHAN
1	L	INDICE			2001	BORDAS
1	L	MATH INFO			2001	DELAGRAVE
1	L	MANUEL DE MATHEMATIQUES			2002	ELLIPSES
1	L	FICHES TD TP			2002	ELLIPSES
1	L	MATH INFO			2003	HACHETTE
1	L	DECLIC			1999	HACHETTE
1	L	DECLIC			2001	HACHETTE
1	L	MATH INFO			2001	HATIER
1	L	TRANSMATH			2001	NATHAN
1	S	MATHEMATIQUES			2001	BELIN
1	S	INDICE			2001	BORDAS
1	S	FRACTALE			2001	BORDAS
1	S	MATHEMATIQUES			2001	BREAL
1	S	DIMATHEME	GEOMETRIE		2001	DIDIER
1	S	DIMATHEME	ANALYSE		2001	DIDIER
1	S	GEOMETRIE		TERRACHER	2001	HACHETTE
1	S	DECLIC			2001	HACHETTE
1	S	ANALYSE		TERRACHER	2001	HACHETTE
1	S	TRANSMATH			2001	NATHAN
1	S	HYPERBOLE			2001	NATHAN
1	SMS	DIMATHEME			1998	DIDIER
1	STI	DIMATHEME			1998	DIDIER
1	STT	INDICE			2003	BORDAS
1	STT	SIGMATH			2001	FOUCHER

1	STT	MATHEMATIQUES			2002	HACHETTE
T	ES	FRACTALE	SP		1998	BORDAS
T	ES	FRACTALE	OBL		1998	BORDAS
T	ES	MATHEMATIQUES			2002	BREAL
T	ES	MATHEMATIQUES			1998	BREAL
T	ES	DIMATHEME	SP		1998	DIDIER
T	ES	DIMATHEME	OBL		1998	DIDIER
T	ES	DECLIC			1998	HACHETTE
T	ES	DECLIC			2002	HACHETTE
T	ES	LE GUIDE ABC BAC			2002	NATHAN
T	ES	TRANSMATH			2002	NATHAN
T	ES	HYPERBOLE			2002	NATHAN
T	L	DECLIC			1999	HACHETTE
T	S	MATHEMATIQUES			1998	BELIN
T	S	FRACTALE	OBL		1998	BORDAS
T	S	FRACTALE	SP		1998	BORDAS
T	S	FRACTALE	SP		2002	BORDAS
T	S	FRACTALE	OBL		2002	BORDAS
T	S	INDICE	SP		2002	BORDAS
T	S	INDICE	OBL		2002	BORDAS
T	S	MATHEMATIQUES	SP		2002	BREAL
T	S	MATHEMATIQUES	OBL		2002	BREAL
T	S	MATHEMATIQUES	SP		1998	BREAL
T	S	MATHEMATIQUES	OBL		1998	BREAL
T	S	DIMATHEME	SP		1998	DIDIER
T	S	DIMATHEME	OBL		1998	DIDIER
T	S	BAC AVEC MENTION			1998	ELLIPSES
T	S	EXERCICES			1999	ELLIPSES
T	S	FOR MATH			1999	ELLIPSES
T	S	MATHEMATIQUES	SP	TERRACHER	1998	HACHETTE
T	S	MATHEMATIQUES	OBL	TERRACHER	1998	HACHETTE
T	S	DECLIC	SP		1998	HACHETTE
T	S	DECLIC	OBL		1998	HACHETTE
T	S	CORRIGES		TERRACHER	1998	HACHETTE
T	S	CORRIGES		TERRACHER	1996	HACHETTE
T	S	MATHEMATIQUES		TERRACHER	2002	HACHETTE
T	S	DECLIC			2002	HACHETTE
T	S	TRANSMATH	OBL		2002	NATHAN
T	S	TRANSMATH	SP		1998	NATHAN
T	S	TRANSMATH	OBL		1998	NATHAN
T	S	HYPERBOLE	OBL		2002	NATHAN
T	S	HYPERBOLE	SP		2002	NATHAN
T	STI	DIMATHEME			1997	DIDIER
T	STI	MATHEMATIQUES			1998	HACHETTE
T	STI	MATHEMATIQUES			1998	NATHAN
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1999	DIDIER
T	STT	DIMATHEME			1999	DIDIER
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1997	FOUCHER
T	STT	MATHS ACA ET ACC			1997	FOUCHER
T	STT	MATHS ACA ET ACC			2002	HACHETTE
T	STT	MATHS ACA ET ACC			1998	HACHETTE
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1998	HACHETTE
T	STT	COMPTABILITE GESTION			2002	HACHETTE
T	STT	COMPTABILITE GESTION			1998	NATHAN
T	STT	MATHS ACA ET ACC			1998	NATHAN
T		ENSEIGNER LES PROBAS			1994	IREM
BEP	INDUSTRIEL	MATHEMATIQUES 2		BARUSSAUD,FAVRE ARTIGUES,THEVENON	1994	FOUCHER
BEP	INDUSTRIEL	MATHEMATIQUES	INDUSTRIEL, SANITAIRE ET SOCIAL	ASTIER,VRIGNAUD	2002	NATHAN
BEP	TERTIAIRE	LES CAHIERS DE MATHEMATIQUES		BARUSSAUD,NOËL	2001	FOUCHER
BEP	TERTIAIRE	MATHEMATIQUES	TERTIAIRE,HÔTELLERIE,RESTAURATIO	ASTIER,VRIGNAUD	2002	NATHAN

			N			
BTS	INDUSTRIEL	ANALYSE,ALGEBRE LINEAIRE,NOMBRES COMPLEXES	BATIMENT & LABO	VERLANT	1997	FOUCHER
BTS	INDUSTRIEL					FOUCHER
BTS	TERTIAIRE	ANALYSE ET ALGEBRE LINEAIRE TOME1	INFORMATIQUE ET GESTION	VERLANT	1997	FOUCHER
BTS	TERTIAIRE					HACHETTE
BTS		PROBAS ET STATS,STATS INFERENTIELLES			1996	IREM
BTS/IUT		PROBAS ET STATS		GACÔGNE,FRUGIER	1990	EYROLLES

Annales

BAC	ES	ANNALES	CORRIGE		1998	HATIER
BAC	ES	ANNALES	SUJETS		1998	HATIER
BAC	ES	ANNALES	SUJETS		1995	VUIBERT
BAC	ES L	ANNALES	SUJETS		1997	NATHAN
BAC	ES L	ANNALES	CORRIGE		1997	NATHAN
BAC	ES L	ANNALES	CORRIGE		1998	VUIBERT
BAC	ES L	ANNALES	SUJETS		1998	VUIBERT
BAC	L	ANNALES	CORRIGE		1998	HATIER
BAC	L	ANNALES	SUJETS		1998	HATIER
BAC	L	ANNALES	SUJETS		2000	HATIER
BAC	L	ANNALES	SUJETS		2001	HATIER
BAC	L	ANNALES	SUJETS		1996	VUIBERT
BAC	S	ANNALES	CORRIGE		1998	HATIER
BAC	S	ANNALES	CORRIGE		1998	HATIER
BAC	S	ANNALES	SUJETS		1998	HATIER
BAC	S	ANNALES	SUJETS		1997	NATHAN
BAC	S	ANNALES	CORRIGE		1998	NATHAN
BAC	S	ANNALES	CORRIGE		1998	VUIBERT
BAC	S	ANNALES	SUJETS		1998	VUIBERT
BAC	S	ANNALES	SUJETS		1996	VUIBERT
BAC	S	ANNALES	SUJETS		1995	VUIBERT
BAC	STT STI	ANNALES	SUJETS		1995	NATHAN
BAC	STT STI	ANNALES	CORRIGE		1996	NATHAN
BAC	STT STI	ANNALES	CORRIGE		1998	NATHAN
BAC	STT STI	ANNALES	SUJETS		1998	NATHAN
BREVET		ANNALES	CORRIGE		1998	HATIER
BREVET		ANNALES	CORRIGE		1997	NATHAN
BREVET		ANNALES	SUJETS		1997	NATHAN
BREVET		ANNALES	SUJETS		1998	NATHAN
BREVET		ANNALES	CORRIGE		1994	VUIBERT
BREVET		ANNALES	SUJETS		1994	VUIBERT
BREVET		ANNALES	SUJETS		1995	VUIBERT
BREVET		ANNALES	SUJETS		1996	VUIBERT
BREVET		ANNALES	SUJETS		1998	VUIBERT

Le jury remercie tous les éditeurs qui ont contribué à l'actualisation de la bibliothèque en facilitant l'acquisition de leurs ouvrages récents.
Il tient à mentionner tout particulièrement les maisons d'édition suivantes, qui ont fait preuve d'une grande générosité, et ont fourni gracieusement un nombre significatif de manuels parus en 2005 à l'occasion de la mise en œuvre des nouveaux programmes de terminale.

BREAL – DIDIER – DUNOD – MASSON – VUIBERT - NATHAN

5.2. Calculatrices

Depuis la session 1994, les calculatrices personnelles sont interdites pour les deux épreuves orales (cf. B.O. n°13 du 15-04-93). Pour les sujets qui en nécessiteraient l'usage, les candidats pourront en emprunter une à la bibliothèque du CAPES.

Pour la session 2006 deux constructeurs ont permis par des prêts gracieux de proposer une quantité suffisante de modèles récents de calculatrices rétroprojetables.

Les modèles présents étaient :

Casio, Classpad 300
Texas Instruments, Voyage 200

Pour la session 2007, il est prévu un prêt d'un troisième modèle :

Hewlett-Packard, 49G

Le jury, dans le souci d'aider candidats et formateurs à se préparer de manière efficace aux épreuves, a mis en ligne sur son site deux documents :

Un aperçu du Casio Classpad 300
Un aperçu du TI Voyage 200

que tout visiteur du site peut librement utiliser. Un document analogue concernant la Hewlett-Packard 49G sera mis en ligne dès que possible. Ces documents, assortis d'une introduction, montrent dans quel esprit le jury souhaite voir utiliser ces machines. Des exemplaires imprimés de ces textes étaient mis à la disposition des candidats pendant leur préparation, de sorte qu'il leur était inutile de s'en munir pour se présenter aux épreuves.

CONCOURS DE TROISIEME VOIE
Mathématiques
Session 2006

Composition du jury :

	nom	prénom	grade	académie
Mme	RUGET (*Présidente*)	Claudine	IGEN	
Mme	AUDOUIN	Marie-Claude	IPR	Versailles
Mme	BLAU	Danielle	IPR	Toulouse
M.	BOUSCASSE	Jean-Marie	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	BRIANT	Nathalie	Professeur Agrégé	Montpellier
M.	CHAREYRE	Bernard	Professeur Agrégé	Créteil
Mme	ERNOULT	Monique	Professeur Agrégé	Créteil
M.	FAVREAU	Jean	Professeur Agrégé	Versailles
Mme	LELARGE	Michèle	Professeur Agrégé	Paris
M.	MERCKHOFFER	René	IPR	Versailles
M.	MICHALAK	Pierre	IPR	Versailles
M.	MURGIER	Thierry	IPR	Montpellier
M.	PUYOU	Jacques	Professeur Agrégé	Bordeaux
Mme	ROUDNEFF	Evelyne	IPR	Versailles
Mme	SAINT-LANNES	Maryse	Professeur Agrégé	Paris

Rapport de la présidente :

Les candidats présents aux épreuves du concours du CAPES troisième voie pour la première session 2006 ont été au nombre de 83 (70 dans le public et 13 dans le privé). Après l'écrit, 20 candidats ont été déclarés admissibles pour le public et 5 pour le privé. Après l'oral, 9 candidats ont été déclarés admis pour le public, et un pour le privé.
S'agissant du public, la barre de la liste principale d'admission est de 9/20, la moyenne générale des candidats admis (écrit plus oral) est de 10,48/20. Pour le privé, la barre est de 9/20, et la moyenne générale des admis est de10,13.

A l'écrit, les candidats au troisième voie, qui passaient la première épreuve du CAPES ont moins bien réussi, en général que les autres candidats. A l'oral, la deuxième épreuve n'a pas permis de réellement mettre en valeur les apports spécifiques de ces nouveaux candidats relatifs à leur carrière professionnelle précédente. Une certaine timidité a pu les gêner, ou pour la plupart, un manque de réflexion préalable, en particulier pour ceux qui, parmi eux, avaient été employés dans différents métiers proches de l'éducation.

On relève, parmi les admissibles public et privé réunis, les catégories d'emplois précédents suivantes :

	Cadres du secteur privé conventions collectives :	2 + 1
	Sans emploi	1 + 2
	Formateurs dans le secteur privé	2 + 1
	Personnel enseignant non titulaire	1
	Vacataire enseignant du supérieur	1
	Contractuel second degré	3
2	Maître d'internat	1
	Maître auxiliaire	1

Elève IUFM première année	5
Salarié secteur tertiaire	2
Contractuel CFA	1

Les candidats admis ont fait preuve d'une grande régularité dans leurs résultats aux différentes épreuves. Ils ont de plus montré une motivation profonde et sérieuse pour le métier auquel ils prétendaient.

Le jury suggère aux futurs candidats de mettre d'une façon plus éclatante leurs spécificités en valeur, et espère qu'ils bénéficieront d'une préparation de qualité.