

DGER

**Direction
Générale de
l'enseigne-
ment
et de la
recherche**

Sous-direction de la politique des formations de l'enseignement général technologique et professionnel
Bureau Examens, Concours et Diplômes

**Rapport de Monsieur le Président des jurys des CAPESA.
recueil des sujets & commentaires pédagogiques**

CONCOURS DE RECRUTEMENT DES
PROFESSEURS **C**ertifiés de L'**E**nseignement **A**GRICOLE

section : MATHEMATIQUES

**EXTERNE – INTERNE
(public & privé)**

session 2004

REPUBLIQUE FRANCAISE

Ministère de l'Agriculture, de l'Alimentation, de la Pêche et des Affaires Rurales

Bureau Examens, Concours et Diplômes
B.P. 79 - 31326 CASTANET TOLOSAN CEDEX
tél : 05 61 28 94 16 - fax : 05 61 28 94 21

REMERCIEMENTS

Les CAPESA de mathématiques (concours publics et deuxième catégorie internes et externes) supposent, à chaque session, une gestion minutieuse des candidats, des sujets d'écrit et d'oral, des locaux, ainsi qu'un gros travail des membres du jury, des personnels administratifs et de surveillance.

Mener à bien ces concours mobilise des moyens, des personnes, et des bonnes volontés de toutes parts.

Monsieur le Président tient donc à remercier chaleureusement tous ceux dont la collaboration efficace a permis au jury d'accomplir sa mission: personnel du BECD; vice-présidence; informaticiens; administrateurs, proviseur, proviseur adjoint et personnels du lycée agricole "LES VASEIX"; concepteurs et correcteurs des épreuves écrites et membres des commissions d'oral.

Il remercie également tous les "prêteurs bénévoles de livres" qui ont permis d'enrichir la bibliothèque d'oral du CAPESA et de présenter ainsi un choix décent d'ouvrages de référence.

Composition du jury

Monsieur MOUSSA, Inspecteur Général de Mathématiques, **Président**.

Madame JACOB, IPR-IA IPEA, **vice-présidente**.

Monsieur PACULL. IPEA, **vice-président**.

M. ALVEZ Yves, professeur agrégé.

M. AMY Jean, professeur agrégé.

Mme ANGELIQUE Françoise, professeure agrégée.

M. ARNAL Florent, professeur agrégé.

Mme BAJOU Brigitte, professeure agrégée.

M. BARBOLOSI Dominique. Maître de conférences.

Mme BENOIST Françoise, professeure agrégée.

M. BERGOEND Bruno, professeur agrégé.

M. BERRY Pierre-Jean, professeur agrégé.

Mme BLOND Elisabeth, professeure agrégée.

Mme BRAMOULLÉ Laurence. PRAG.

M. BRAS Laurent, professeur agrégé.

M. BURG Pierre, professeur agrégé.

Mme BURGUIERE Elisabeth, professeure agrégée.

Mme CHAIX Véronique, professeure agrégée

M. COUDERT Bernard, professeur agrégé.

Mme DECHEZLEPRETRE Nathalie, professeure agrégée.

M. EHRSAM Sébastien, professeur agrégé.

M. FARDOUX Marc, professeur agrégé.

Mme FAURE Isabelle, professeure agrégée.

M. FAURE Eric, professeur agrégé.

M. FRUGIER Gérard, professeur agrégé.

M. GAUMET J-Pascal, professeur agrégé.

M. GUYON Yves, professeur agrégé.

M. HEMERY Robert, professeur agrégé.

M. HENRY Philippe, professeur agrégé.

M. JACOB Jean-Philippe, professeur agrégé.

Mme JOLIVET Isabelle, professeure agrégée.

M. LAIGNEAU Frédéric, professeur agrégé.

M. LARBI Kamel, professeur agrégé.

M. LAURENT Daniel, professeur certifié.

M. LETERRIER Pierre, professeur agrégé.

M. MERCKHOFFER René. IA-IPR.

M. MISCHELER Jean-Pierre, professeur agrégé.

Mme OSMOND Ginette. Inspectrice de l'enseignement agricole.

M. PARNAUDEAU Jean-Marie, professeur agrégé.

M. PIEDEVACHE J-Claude. Inspecteur de l'enseignement agricole.

M. QUET Guillaume, professeur agrégé.

M. RIOU Alexis, professeur certifié.

Mme SACHET Anne-Marie, professeure agrégée.

Mme SAINT LANNES Maryse, professeure agrégée.

M. TARTARY Gérard, professeur agrégé.

M. TEXIER Jacques, professeur agrégé.

M. TRUCHAN Alain, professeur agrégé.

Mme VIGNERON Annie, professeure agrégée.

M. VINAVER Georges. PRAG.

M. VOIROL François, professeur agrégé.

CONCOURS 2001: EFFECTIFS (rappel).

concours	Nombre de postes	Nombre de candidats présents	nombre d'admissibles	nombre d'admis
CAPEA EXT PUBLIC	18	991	79 (3 absents)	18 + 33 sur liste complémentaire
CAPEA EXT PRIVE	6		5	1
CAPEA INT PUBLIC	8	35	12	8 +1 sur liste complémentaire
CAPEA INT PRIVE	3		3	2

CONCOURS 2002: EFFECTIFS (rappel).

concours	Nombre de postes	Nombre de candidats présents	nombre d'admissibles	nombre d'admis
CAPEA EXT PUBLIC	15	771	86 (4 absents à l'oral)	15 + 26 sur liste complémentaire
CAPEA EXT PRIVE	16	17	0	0
CAPEA INT PUBLIC	3	23	5 (1 absent à l'oral)	3
CAPEA INT PRIVE	10	13	1	1

NB: pas de CAPESA ouverts en mathématiques à la session 2003.

CONCOURS 2004: EFFECTIFS

concours	Nombre de postes	Nombre de candidats présents	nombre d'admissibles	nombre d'admis
CAPEA EXT PUBLIC	11	471	77 (6 absents à l'oral)	11 (+21 sur liste complémentaire)
CAPEA EXT PRIVE	13		3 (un doublon)	0
CAPEA INT PUBLIC	4	35	11 (2 absents à l'oral)	4 (+2 sur liste complémentaire)
CAPEA INT PRIVE	9		3	2

NB: Pour la session 2004 comme pour les sessions antérieures, les barres d'admissibilité et d'admission ont été les mêmes pour les concours externes publics et privés d'une part, et pour les concours internes publics et privés d'autre part.

RAPPELS REGLEMENTAIRES

ET

DEROULEMENT DES EPREUVES 2004

RAPPELS REGLEMENTAIRES

FICHE - CAPESA SECTION : MATHEMATIQUES

(Concours : externe)

I - EPREUVES ECRITES D'ADMISSIBILITE

Nature des épreuves	Durée	Coefficient
1 – Première composition	5 heures	2,5
2 – Deuxième composition	5 heures	2,5

Les candidats doivent se munir, aussi bien pour les épreuves écrites que pour les épreuves orales, d'une calculatrice programmable de gamme courante, conforme à la réglementation en vigueur (note n° 99-018 du 01 février 1999 du BOEN n° 6 du 11 février 1999.).

11 - Objectifs :

Les épreuves écrites visent à évaluer :

- la solidité et l'étendue des connaissances scientifiques des candidats,
- l'aptitude des candidats à mobiliser ces connaissances pour la résolution de problèmes dans des contextes variés,
- les capacités des candidats dans le domaine de l'expression (clarté et précision des raisonnements, qualité de la présentation et de la rédaction, maîtrise des instruments de dessin et de calcul).

12 - Nature et forme des épreuves :

Les épreuves écrites comportent deux compositions. Chacune d'entre elles peut être constituée :

- d'un problème présentant une unité thématique, ou
- de deux problèmes, portant sur des thèmes distincts.

13 - Programme (susceptible de modifications dans les sessions ultérieures):

Le programme des épreuves écrites du concours du CAPESA de Mathématiques est identique au programme du concours externe du CAPES de Mathématiques publié au B.O.E.N. n° spécial 8 du 24 mai 2001 (reconduit dans les BOEN spéciaux 13 du 30/05/02 et 3 du 22/05/03) du ministère chargé de l'éducation nationale.

II - EPREUVES ORALES D'ADMISSION

Nature des épreuves	Durée	Coefficient
1 – Exposé sur un thème donné suivi d'un entretien avec le jury	Exposé : 25 mn maximum Entretien : 20 mn maximum (préparation : 2 h)	2,5
2 – Epreuve sur dossier (a)	55 mn maximum Exposé : 25 mn maximum Entretien : 30 mn maximum (préparation : 2 h)	2,5
(a) Cette épreuve comporte un exposé suivi d'un entretien avec les membres du jury. Elle prend appui sur des documents proposés par le jury. Elle permet au candidat de démontrer : • Qu'il connaît les contenus d'enseignement et les programmes de la discipline ; • Qu'il a réfléchi aux finalités et à l'évolution de la discipline ainsi que sur les relations de celle-ci aux autres disciplines ; • Qu'il a des aptitudes à l'expression orale, à l'analyse, à la synthèse et à la communication ; • Qu'il peut faire état de connaissances élémentaires sur l'organisation d'un établissement d'enseignement agricole.		

21 - Objectifs :

Les épreuves orales visent à évaluer la capacité du candidat à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement. Le discours mathématique se place au niveau de l'enseignement des collèges, des lycées et des lycées agricoles, et il sera demandé une bonne maîtrise des concepts et problèmes figurant à ces programmes.

La mise en valeur de l'enchaînement des idées constitue un objectif majeur. Le candidat devra être capable d'analyser l'articulation mutuelle des différents éléments constitutifs de son exposé : définitions, théorèmes, exemples, exercices,...

Les épreuves orales visent à évaluer également les capacités du candidat dans le domaine de l'expression

orale : précision et clarté de l'expression, maîtrise de la langue, qualité de l'élocution, organisation du travail au tableau, maîtrise de la communication, autonomie par rapport à des notes lors d'un exposé, aptitude à l'analyse et à la synthèse, aptitude à débattre et argumenter lors de l'entretien.

22 - Nature et forme des épreuves :

221 - Première épreuve : Exposé sur un thème donné suivi d'un entretien avec le jury.

Le sujet est choisi par le candidat parmi deux titres qu'il a tirés au sort. Ces titres indiquent la nature et l'étendue de la question à traiter. Cette épreuve est organisée autour de l'étude d'un concept ; cette étude porte non seulement sur le développement théorique ou technique de définitions et de propriétés attachées à ce concept mais également sur leur illustration par des exemples simples et sur leur interaction avec les problèmes mathématiques qui mettent en jeu ce concept.

L'entretien avec le jury portera sur les questions soulevées par l'exposé du candidat. Le jury pourra, éventuellement, demander au candidat de développer certaines démonstrations importantes.

La préparation s'effectue sans document, mis à part les textes des instructions du CAPES et du CAPESA, les B.O.E.N., arrêtés, notes de service ou brochures contenant les programmes de mathématiques des collèges, lycées et lycées agricoles. Ces documents seront mis à la disposition des candidats. L'utilisation des calculatrices personnelles n'est pas autorisée, celles-ci étant assimilées à des documents. Toutefois, si le candidat souhaite illustrer un point précis de son exposé en employant une calculatrice, il peut demander à utiliser sa calculatrice personnelle pour réaliser cette illustration.

222 - Deuxième épreuve : Epreuve sur dossier

Elle prend appui sur des documents proposés par le jury. Elle a pour objet la présentation d'un choix d'exemples et d'exercices sur un thème donné.

Le candidat a le choix entre deux sujets fixés par le jury. Chacun d'eux précise l'étendue du thème, fournit, le cas échéant, des indications sur les outils et méthodes à exploiter, des extraits des programmes et conseille une documentation.

Cette épreuve est axée sur l'étude pratique, à travers un choix d'exercices, d'un sujet mathématique. Le terme "exercice" est à prendre au sens large ; il peut s'agir d'applications directes du cours, d'exemples ou contre-exemples venant éclairer une méthode, de situations plus globales ou plus complexes utilisant éventuellement des notions prises dans d'autres disciplines.

Le candidat doit, pendant sa préparation, rédiger, sur des fiches qui lui sont fournies, un résumé des commentaires qu'il compte développer dans son exposé et les énoncés des exercices qu'il propose. Ces énoncés comportent, s'il y a lieu, un découpage en questions marquant les étapes de l'étude à mener ou fournissant des indications sur la méthode de résolution. La qualité de ces fiches intervient dans l'appréciation de l'épreuve.

Le candidat dispose des ouvrages de la bibliothèque du CAPESA. Il peut aussi en apporter lui-même. Ceux-ci doivent être imprimés, vendus dans le commerce et ne pas comporter de notes manuscrites. Le jury les contrôle et peut s'opposer à l'utilisation de certains, s'il juge que cela risque de dénaturer l'épreuve. **Tout document personnel est interdit.** L'utilisation des calculatrices personnelles est autorisée.

Au début de l'épreuve, le candidat remet ses fiches au jury. Il dispose des notes écrites pendant sa préparation sur du papier qui lui a été fourni et de la documentation qu'il a utilisée.

Il explique dans son exposé la façon dont il a compris le sujet qu'il a retenu et les objectifs recherchés dans ses exercices : acquisition de connaissances, de méthodes, de techniques, évaluation. Il analyse la pertinence des différents outils mis en jeu.

L'entretien peut porter aussi bien sur la présentation des exercices que sur leur résolution effective. Il permet d'approfondir certains points, de vérifier l'étendue de la réflexion du candidat, de s'assurer de la solidité de ses compétences sur les questions qu'il a abordées dans ses fiches et, plus généralement, sur le sujet.

La fin de l'entretien pourra être consacrée à quelques aspects très simples de l'organisation des établissements d'enseignement agricoles.

23 - Programme (susceptible de modifications dans les sessions ultérieures):

231 - Le programme de la 1ère épreuve orale porte sur :

A) Programme de l'enseignement secondaire :

Il comporte les programmes de mathématiques :

- des collèges de l'Education Nationale,
- des lycées d'enseignement général et technologique agricoles. (seconde générale et technologique, filière S, filières technologiques, BTSA)

Sont concernés à la fois les programmes en vigueur au premier janvier de l'année du concours et ceux en vigueur au premier janvier de l'année précédente.

B) Certaines parties du programme des épreuves écrites (B.O.E.N. n° spécial 8 du 24 mai 2001).

- 2 V 2 "configurations", alinéas a) et c)
- 2 V 3 "Transformations"
- 2 V 4 "Emploi des nombres complexes en géométrie", alinéas a), c), d)
- 3 I 2 "fonction d'une variable réelle"
- 3 II 2 "Dérivation" dans le cas des fonctions à variable réelle ou complexe
- 3 II 3 "Intégration sur un intervalle compact" dans ce même cas
- 3 II 4 "Etude locale de fonctions" alinéa a)
- 3 IV 2 "Equations linéaires scalaires"
- 4 Chapitre entier

C) Statistique

1) Statistique descriptive :

a) Statistique descriptive à une dimension :

- présentation des données (variables discrètes, variables continues),
- représentations graphiques
- caractéristiques de tendance centrale
- caractéristiques de dispersion
- caractéristiques de forme.

b) Statistique descriptive à deux dimensions :

- représentations graphiques
- coefficient de corrélation
- ajustement affine (méthode des moindres carrés)
- ajustements se ramenant à un ajustement affine.

2) Statistique inférentielle :

a) Echantillonnage :

- principes de l'échantillonnage
- distribution d'échantillonnage des moyennes, des proportions
- loi faible des grands nombres
- théorème central limite

b) Estimation :

* Estimation ponctuelle :

- principales qualités d'un estimateur
- exemples d'estimateurs d'une moyenne, d'une proportion, d'une variance.

* Estimation par intervalle de confiance :

- d'une moyenne
- d'une proportion

3) Les tests statistiques

- principes généraux des tests statistiques
- risques de 1ère et 2ème espèce
- tests de conformité sur une moyenne, sur une proposition

232 Le programme de la 2ème épreuve orale :

Partie A) du programme de la 1ère épreuve orale

FICHE-CAPESA SECTION : MATHEMATIQUES

(Concours interne)

Les candidats doivent se munir, pour l'épreuve écrite, d'une calculatrice programmable conforme à la réglementation en vigueur (note n° 99-018 du 01 février 1999 du B.O.E.N. n°6 du 11 février 1999), ainsi que des instruments de dessin usuels.

I- EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Nature de l'épreuve	Durée	Coefficient
Composition pouvant porter sur: algèbre; analyse; géométrie; probabilités; statistiques.	5 heures	2

Objectifs:

Cette épreuve vise à évaluer:

- la solidité et l'étendue des connaissances scientifiques des candidats;
- l'aptitude des candidats à mobiliser leurs connaissances pour la résolution d'exercices ou de problèmes dans des contextes variés;
- la bonne utilisation par les candidats des instruments de dessin et de calcul;
- la qualité de la réflexion pédagogique des candidats;
- les capacités des candidats dans le domaine de l'expression écrite: clarté et précision des raisonnements, qualité de la présentation et de la rédaction.

Nature et forme de l'épreuve:

- Elle peut porter sur: algèbre; analyse; géométrie; probabilités; statistiques.
- Elle porte sur des thèmes abordés dans les programmes de mathématiques enseignés dans les établissements d'enseignement agricole et son niveau peut aller jusqu'à celui de la licence.
- Elle est composée de plusieurs exercices (au moins trois) dont les thèmes peuvent couvrir l'ensemble du programme.
- Certaines questions de ces exercices pourront faire appel au vécu professionnel des candidats: correction et annotation d'une copie d'élève, élaboration d'un corrigé type à destination des élèves, construction d'une séance de travaux dirigés...
- Certaines questions de ces exercices pourront nécessiter l'utilisation d'une calculatrice programmable.

II- EPREUVE ORALE D'ADMISSION

Nature de l'épreuve	Durée	Coefficient
Epreuve professionnelle sur dossiers élaborés par le candidat (a)	55 minutes maximum exposé: 15 minutes maximum entretien: 40 minutes maximum	2
(a) le descriptif des dossiers est précisé en annexe. Le candidat fait parvenir au jury ses dossiers suivant les modalités définies annuellement et portées sur la convocation aux épreuves d'admissibilité.		

Objectifs: Cette épreuve vise à évaluer:

- la bonne maîtrise du contenu des programmes des classes où le candidat enseigne et de celui des classes où a vocation à enseigner un professeur certifié.
- la qualité de la réflexion pédagogique du candidat;
- les capacités du candidat dans le domaine de l'expression orale: structuration de la présentation, clarté de l'exposé, pertinence de l'argumentation, autonomie par rapport au dossier, tenue et gestion du tableau.

Nature et forme de l'épreuve:

1°) Description des dossiers:

- Le candidat rédige deux dossiers. Chaque dossier doit compter 20 pages maximum, annexes comprises et doit faire l'objet d'une note de présentation d'une page maximum.
- Chaque dossier décrit une séquence d'enseignement. Une séquence d'enseignement est "une suite articulée de séances d'enseignement, avec son dispositif d'évaluation". Les deux séquences présentées doivent traiter de sujets différents et porter sur des niveaux (Cf.: III-programme) différents.
- L'un des dossiers doit porter sur probabilités, statistiques; l'autre sur analyse ou algèbre ou géométrie.

2°) Description de l'épreuve: Il s'agit d'une interrogation, sans préparation ni document, à partir de l'un des deux dossiers établis par le candidat.

- Le jury choisit l'un des deux dossiers, lequel fait l'objet d'une présentation par le candidat pendant 15 minutes maximum: il ne s'agit pas d'une récitation du dossier mais d'une présentation incluant contexte, motivation des choix, démarche, argumentation.
- L'entretien (40 minutes maximum) peut porter sur le contenu du dossier, sur le contenu des programmes des classes où le candidat enseigne et sur celui des classes où a vocation à enseigner un professeur certifié.

Evaluation: Seuls l'exposé et l'entretien sont évalués, à l'exclusion du dossier présenté.

III- PROGRAMME

Il est constitué des thèmes abordés dans les programmes de mathématiques (en vigueur au premier janvier de l'année du concours et au premier janvier de l'année précédente) enseignés dans les établissements d'enseignement agricole, en particulier:

- classe de Seconde générale et technologique,
- classes de Première et Terminale S,
- classes de Première et Terminale technologiques agricoles,
- classes de BTSA,

le niveau de l'épreuve écrite pouvant aller jusqu'à celui de la licence.

DEROULEMENT DES EPREUVES 2004

I. Les épreuves écrites.

Elles ont eu lieu les 16 et 17 Février 2004. Chaque épreuve fait l'objet d'une double correction à partir d'un barème très précis élaboré lors d'une réunion du jury. **La seule fonction des notes est de classer les candidats. Elles n'ont donc pas de valeur d'évaluation dans l'absolu, mais revêtent une importance relative.**

1°) Concours externes:

Le programme de ces épreuves est formé des programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire et du programme complémentaire.

- Les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire concernent à la fois les programmes en vigueur au premier janvier de l'année du concours et ceux en vigueur au premier janvier de l'année précédente.

- Le programme complémentaire, identique à celui du CAPES de l'Education nationale, figure dans le BOEN spécial n°8 du 24/05/2001 modifié pour les sessions ultérieures par le BOEN spécial n°5 du 20/05/2004.

- La fiche "CAPESA externe" (p. 7 et suiv.) sera modifiée à partir de la session 2005.

2°) Concours internes:

L'écrit ne comporte à présent qu'une épreuve (Cf. arrêté du 19 septembre 2001).

Son niveau peut aller jusqu'à celui de la licence.

Le programme est constitué des thèmes abordés dans les programmes de mathématiques (en vigueur au premier janvier de l'année du concours et au premier janvier de l'année précédente) enseignés dans les établissements d'enseignement agricole, en particulier:

- classe de Seconde générale et technologique,
- classes de Première et Terminale S,
- classes de Première et Terminale technologiques agricoles,
- classes de BTS.

II. Les épreuves orales.

1°) Organisation. Elles ont eu lieu du 7 au 11 juin 2004 au Lycée agricole "Les VASEIX" à Limoges.

	Oral 1	Oral 2
Candidats externes Préparation : 2 heures	<u>45 minutes maximum:</u> 25' maximum d'exposé; 20' maximum d'entretien.	<u>55 minutes maximum:</u> 25' maximum d'exposé; 30' maximum d'entretien.
Candidats internes (sans préparation)	-	<u>55 minutes maximum:</u> 15' maximum d'exposé; 40' maximum d'entretien.

Remarque: Les **épreuves sur dossier (concours externe) ont une durée différente (55 minutes) de celle accordée au CAPES de l'Education Nationale (45 minutes)**: les candidats doivent se préparer en conséquence.

2°) Remarque sur les exposés:

Il est à noter que quel que soit le type d'épreuve, la durée consacrée à l'exposé proprement dit du candidat, **sans intervention du jury**, est réglementaire et ne peut être prolongée: les candidats sont interrompus en cas de débordement. Par ailleurs, le temps non utilisé par le candidat pendant cette période d'exposé ne peut être "crédité" sur la durée de l'entretien qui restera de 20 minutes maximum à l'oral 1, de 30 minutes maximum à l'oral 2 et de 40 minutes maximum à l'oral interne, quel que soit le temps utilisé par le candidat pour son exposé.

3°) Remarque sur le programme des épreuves orales:

Le règlement précise le programme des épreuves orales:

- CAPESA externe: programmes de l'enseignement secondaire et BTSA à la fois en vigueur au premier janvier de l'année du concours et en vigueur au premier janvier de l'année précédente, et certaines parties du programme complémentaire;
- CAPESA interne: le même qu'à l'écrit.

Les candidats doivent être avertis que les programmes des oraux du CAPESA sont légèrement différents de ceux des CAPES de l'Education nationale, car **ils tiennent compte de la spécificité de l'enseignement agricole: en particulier ils contiennent les programmes des filières des baccalauréats technologiques agricoles et des BTSA.**

III. Première épreuve orale "Exposé sur un thème donné" (concours externes).

- Pour cette épreuve, le candidat tire au sort une enveloppe contenant deux sujets et choisit pour le traiter l'un des deux sujets.
- La préparation de cette épreuve s'effectue pendant deux heures, sans autre document que les programmes et instructions officielles.
- **L'utilisation des calculatrices personnelles** était autorisée jusqu'à la session 2000. **Depuis la session 2001, le règlement assimile les calculatrices personnelles à des documents. En conséquence, elles ne sont plus autorisées pour cette épreuve.** Toutefois, si le candidat souhaite illustrer un point précis de son exposé en employant une calculatrice, il peut demander à utiliser sa calculatrice personnelle pour réaliser cette illustration. Il va sans dire qu'il lui faudra alors rendre compte devant le jury d'une utilisation justifiée et pertinente de ce matériel.
- Pendant l'épreuve, le candidat ne dispose que de sa préparation manuscrite. Il n'a rien à remettre au jury en dehors de la fiche administrative.

IV. Deuxième épreuve orale "épreuve sur dossier" (concours externes).

- Deux sujets sont proposés par le jury au choix du candidat. Ils tiennent compte du thème que celui-ci a traité en première épreuve de façon que cette deuxième épreuve porte, dans la mesure du possible, sur une autre partie du programme. En particulier, vu les spécificités des mathématiques dans l'enseignement agricole, **le jury de la session 2004 a proposé, en deuxième épreuve, aux candidats n'ayant pas choisi ce thème en première épreuve, deux sujets dans le domaine probabilités ou des statistiques, portant sur des niveaux d'enseignement différents.**

- La préparation de cette épreuve s'effectue pendant deux heures, avec documents: le règlement actuel autorise l'utilisation d'ouvrages imprimés, vendus dans le commerce et ne comportant pas de notes manuscrites. Tout document personnel est interdit. L'utilisation des calculatrices personnelles est autorisée. **Les candidats doivent donc se munir de leur calculatrice personnelle pour cette deuxième épreuve.**

- Le candidat peut utiliser les ouvrages de la bibliothèque du CAPESA de mathématiques.

- Au début de l'épreuve, le candidat remet au jury la fiche où il a noté un résumé de ses commentaires et les énoncés des exercices qu'il propose. **La qualité de cette fiche intervient dans l'évaluation de l'épreuve.** Pendant l'épreuve, il dispose des notes écrites pendant sa préparation manuscrite, de la documentation qu'il a utilisée, et s'il le souhaite, d'un double au papier carbone de sa fiche.

- Remarque sur la bibliothèque du CAPESA de mathématiques:

Elle contient des ouvrages classiques de l'enseignement secondaire (seconde générale et technologique, filière STAE-STPA, S...), des manuels classiques de BTS et BTSA, des annales de baccalauréats, des ouvrages destinés aux enseignants, des instruments de géométrie.

Le jury ne peut garantir le prêt d'un livre donné à un moment donné: les candidats habitués à un manuel particulier doivent donc s'en munir.

V. Epreuve professionnelle (concours internes).

Cette épreuve a été notablement simplifiée (Cf. arrêté du 19 septembre 2001). Il s'agit à présent d'une épreuve professionnelle sur dossiers élaborés par le candidat.

1°) Description des dossiers:

- Le candidat a rédigé et transmis deux dossiers. Chaque dossier doit compter 20 pages maximum, annexes comprises et doit faire l'objet d'une note de présentation d'une page maximum.

- Chaque dossier décrit une séquence d'enseignement. Une séquence d'enseignement est "une suite articulée de séances d'enseignement, avec son dispositif d'évaluation". Les deux séquences présentées doivent traiter de sujets différents et porter sur des niveaux (Cf. : p.12, I. 2°) différents.

- L'un des dossiers doit porter sur probabilités, statistiques; l'autre sur analyse ou algèbre ou géométrie.

2°) Description de l'épreuve: Il s'agit d'une interrogation, **sans préparation**, à partir de l'un des deux dossiers établis par le candidat.

- Le jury choisit l'un des deux dossiers, lequel fait l'objet d'une présentation par le candidat pendant 15 minutes maximum: **il ne s'agit pas d'une récitation du dossier mais d'une présentation incluant contexte, motivation des choix, démarche, argumentation.**

- L'entretien (40 minutes maximum) peut porter sur le contenu du dossier, sur le contenu des programmes des classes où le candidat enseigne et sur celui des classes où a vocation à enseigner un professeur certifié.

Evaluation: Seuls l'exposé et l'entretien sont évalués, et non le dossier présenté.

Remarque: le candidat n'est pas autorisé à conserver son dossier pendant l'épreuve: il en remet tous les exemplaires jury dès son arrivée.

LES EPREUVES ECRITES:
SUJETS,
COMMENTAIRES.

CAPESA EXTERNE

PREMIERE EPREUVE ECRITE (SUJET)

**CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE
SESSION 2004**

C A P E S A

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

PREMIERE EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Première composition.

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

1 Définitions et notations

Soit E un $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E .

Soit f un endomorphisme de E . On dit que f est de rang fini si $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . La dimension de $f(E)$ est appelée rang de f et on la note $\text{rg}(f)$.

L'ensemble des endomorphismes de rang fini est noté $\mathcal{F}(E)$.

2 Exemples et Quelques propriétés des opérateurs de rang finis

1. Soit $E = C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$. On définit $f : E \rightarrow E, x \mapsto f(x) = x'$ dérivée de x . Pour tout entier naturel $k, k \geq 1$, on note g_k l'élément de E défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $g_k(t) = e^{kt}$.
 - a) Montrer que pour tout entier naturel $k, k \geq 1$, le système $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ est libre.
 - b) En déduire que $f \notin \mathcal{F}(E)$.
2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $B \in E, B \neq 0$, on rappelle que pour tout $A \in E$, il existe un couple unique $(Q, R) \in E^2$ tel que $A = BQ + R$ avec $R = 0$ ou $\deg(R) < \deg(B)$. Le polynôme R (resp : Q) est appelé le reste (resp : le quotient) de la division euclidienne de A par B . On définit $f : E \rightarrow E$ qui à tout polynôme P associe $f(P)$ qui est le reste de la division euclidienne de P par B .
 - a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
 - b) Prouver enfin que $f \in \mathcal{F}(E)$.
3. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
 - a) Montrer que $\mathcal{F}(E)$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$.
 - b) Soit $u \in \mathcal{F}(E)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $u \circ v \in \mathcal{F}(E)$ et $v \circ u \in \mathcal{F}(E)$.
 - c) Montrer que $\text{id}_E \in \mathcal{F}(E)$ si, et seulement si, $\dim(E) < +\infty$.
 - d) Déduire de ce qui précède que $\mathcal{F}(E) = \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, $\dim(E) < +\infty$.

1/6
MATE1SN.doc

4. Soit $f \in \mathcal{F}(E)$, $rg(f) = n \geq 1$.

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ deux bases de $f(E)$. On note f_1 la restriction de f à $f(E)$. Soit A et A' les matrices de l'endomorphisme f_1 respectivement dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$,

- a) Montrer que

$$A' = P^{-1}AP.$$

- b) En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\det(A - zI_n) = 0 \iff \det(A' - zI_n) = 0.$$

3 Inversibilité de $id_E - f$

Ici $\mathbb{K}$ est un corps commutatif. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $f \in \mathcal{F}(E)$ vérifiant

$$\ker(id_E - f) = \{0_E\}.$$

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de $f(E)$, on note f_1 la restriction de f à $f(E)$ et A la matrice de f_1 dans la base $\mathcal{B}$. On notera $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ le terme général de la matrice A .

- Montrer que $(id_E - f)_{/f(E)}$ est injective et en déduire que $I_n - A$ est inversible.
- Soit $y \in E$. Justifier l'existence de n éléments $\beta_1, \dots, \beta_n$ de $\mathbb{K}$ tels que

$$f(y) = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$$

et montrer qu'il existe un n -uplet unique $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ vérifiant pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\beta_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = \alpha_i.$$

- Montrer que l'équation d'inconnue $u \in E$

$$(id_E - f)(u) = y$$

admet pour unique solution x définie par

$$x = y + \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i.$$

Qu'en déduit-on pour $id_E - f$?

4 Résolution d'une équation intégrale

Ici E désigne l'ensemble des fonctions numériques, continues sur $[0, 1]$. Soit y une fonction donnée de E , on se propose de déterminer toutes les fonctions $x \in E$ vérifiant pour tout $t \in [0, 1]$

$$x(t) - \int_0^1 (t-s)x(s)ds = y(t). \quad (1)$$

1. Soit f l'application de E dans E qui à tout fonction $x \in E$ associe la fonction $f(x)$ de E définie pour tout $t \in [0, 1]$ par

$$f(x)(t) = \int_0^1 (t-s)x(s)ds.$$

- a) Montrer que f est un opérateur de rang fini dont une base $\mathcal{B}$ de $f(E)$ est constituée des fonctions e_1 et e_2 définies pour tout $t \in [0, 1]$ respectivement par $e_1(t) = 1$ et $e_2(t) = t$. On note f_1 la restriction de f à $f(E)$.
 b) Montrer que $\ker(id_E - f) = \{0_E\}$.
2. a) Montrer que les coordonnées β_1 et β_2 de $f(y)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$\beta_1 = - \int_0^1 sy(s)ds \text{ et } \beta_2 = \int_0^1 y(s)ds.$$

- b) Déterminer la matrice A de f_1 dans la base $\mathcal{B}$, montrer que $I_2 - A$ est inversible et calculer $(I_2 - A)^{-1}$.
 c) En déduire l'expression de la solution x de l'équation (1) en fonction de y .
 d) Donner l'expression de x pour $y(t) = t^2$.

5 Valeurs propres d'un opérateur de rang fini

1. On suppose que E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{F}(E)$, 0 est une valeur propre de f .
2. On pose $\text{rg}(f) = n \geq 1$, soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de $f(E)$ et A la matrice de l'endomorphisme f_1 , restriction de f à $f(E)$ dans la base $\mathcal{B}$.
 a) En utilisant la question 1) partie 2 montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est valeur propre de f alors

$$I_n - \frac{1}{\lambda}A \text{ non inversible.}$$

En déduire que si λ est une valeur propre non nulle de f alors

$$\det(A - \lambda I_n) = 0. \quad (2)$$

- b) Montrer que pour tout nombre ρ non nul tel que $\frac{1}{\rho}$ n'est pas une valeur propre de f , $id_E - \rho f$ est inversible. En déduire que les valeurs propres non nulles λ de f sont exactement les racines non nulles de l'équation (2).
3. On considère à nouveau l'opérateur de rang fini f défini dans la partie 4.
 a) Déterminer les valeurs propres de f .
 b) Pour tout entier naturel non nul n , on définit la fonction x_n pour tout $t \in [0, 1]$ par :

$$x_n(t) = \cos(2n\pi t).$$

Montrer que pour tout entier n non nul, le système $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est un système libre de $\ker(f)$.
 Qu'en déduit-on pour le sous-espace propre associé à la valeur propre 0?

Désormais E est un espace préhilbertien complexe de dimension infinie. Le produit scalaire de deux vecteurs x, y de E sera noté (x, y) . On dira qu'un endomorphisme f de E est hermitien si pour tout $x, y \in E$

$$(f(x), y) = (x, f(y)).$$

Dans la suite f est un endomorphisme hermitien, de rang fini $n > 0$. On notera $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres non nulles de f qui sont distinctes deux à deux. Pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on notera E_{λ_i} le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i .

4. a) Montrer que toute valeur propre de f est réelle.
 b) Montrer que pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, p\}, i \neq j$ on a $E_{\lambda_i} \perp E_{\lambda_j}$.

5. Justifier que

$$E = f(E) \oplus f(E)^\perp.$$

- a) Montrer que $f(E)^\perp$ est stable par f .
 b) Soit $t \in f(E)^\perp$. Calculer $(f(t), f(t))$ et en déduire que $f(E)^\perp \subset \ker(f)$.
 c) Soit $t \in \ker(f)$. Pour tout $u \in E$, calculer $(t, f(u))$ et en déduire que $f(E)^\perp = \ker(f)$, puis que

$$E = f(E) \oplus \ker(f).$$

Qu'en déduit-on pour la dimension de $\ker(f)$?

6. Soit g la restriction de f à $f(E)$. Montrer que les valeurs propres de g sont exactement $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ et en déduire que

$$f(E) = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}.$$

En déduire l'existence de n réels non nuls, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ et d'une base orthonormée $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ de $f(E)$ vérifiant pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f(\varepsilon_i) = \mu_i \varepsilon_i$.

6 Alternative de Fredholm pour un opérateur de rang fini

Soit f un opérateur hermitien, de rang fini $n > 0$, défini sur un espace préhilbertien complexe E . On se propose de résoudre l'équation d'inconnue $x \in E$

$$x - \rho f(x) = y \tag{3}$$

où ρ est un nombre réel non nul donné et y un vecteur donné de E .

On notera $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ les n valeurs propres réelles non nulles de f et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ une base orthonormée de $f(E)$ formée de vecteurs propres de f vérifiant pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f(\varepsilon_i) = \mu_i \varepsilon_i$, dont l'existence a été établie dans la partie précédente.

1. On suppose que $\frac{1}{\rho}$ n'est pas une valeur propre de f .
 a) Montrer que l'équation (3) admet une unique solution. On notera x_0 cette solution.
 b) Montrer qu'il existe un unique n -uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$x_0 = y + \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i.$$

En déduire que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(f(x_0), \varepsilon_k) = (f(y), \varepsilon_k) + \mu_k \alpha_k$$

puis que

$$\alpha_k = (x_0, \varepsilon_k) - (y, \varepsilon_k).$$

c) En écrivant que x_0 vérifie l'équation (3) montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$(x_0, \varepsilon_k) = \frac{1}{1 - \rho \mu_k} (y, \varepsilon_k).$$

d) On pose $\gamma = \frac{1}{\rho}$. Dédurre de ce qui précède que

$$x_0 = y + \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k(y, \varepsilon_k) \varepsilon_k}{\gamma - \mu_k}.$$

2. On note $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ les p ($p \leq n$) valeurs propres non nulles de f qui sont distinctes deux à deux. On suppose maintenant qu'il existe $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $\rho = \frac{1}{\lambda_k}$.

a) Justifier pour tout $x \in E, y \in E$

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^p x'_i + x'' \\ y = \sum_{i=1}^p y'_i + y'' \end{cases}$$

avec pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ x'_i et $y'_i \in E_{\lambda_i}$ et $x'', y'' \in \ker(f)$.

b) En déduire x vérifie (3) si, et seulement si,

$$\text{pour tout } i \in \{1, 2, \dots, p\} \quad x'_i(1 - \rho \lambda_i) = y'_i \text{ et } x'' = y''.$$

c) Conclure de ce qui précède que si (3) admet une solution, alors nécessairement $y \in E_{\lambda_k}^\perp$.

d) On suppose que la condition $y \in E_{\lambda_k}^\perp$ est remplie.

d1) Montrer que l'équation (3) possède une unique solution $x'_0 \in E_{\lambda_k}^\perp$ et que

$$x'_0 = y'' + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^p \frac{1}{1 - \rho \lambda_i} y'_i.$$

d2) En déduire que toute solution x de (3) s'écrit

$$x = x'_0 + x'$$

avec $x' \in E_{\lambda_k}$.

7 Un exemple d'application

On pourra utiliser la formule de Fubini : pour toute fonction h continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, on a

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 h(s, t) dt \right) ds = \int_0^1 \left(\int_0^1 h(s, t) ds \right) dt.$$

Ici E désigne l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, continues sur $[0, 1]$. On munit E du produit scalaire défini pour tout $u, v \in E$ par

$$(u, v) = \int_0^1 u(t) \overline{v(t)} dt.$$

Etant donné ρ un réel non nul et $y : t \rightarrow t^2$, on se propose de déterminer toutes les fonctions $x \in E$ vérifiant pour tout $t \in [0, 1]$

$$x(t) - \rho \int_0^1 (t+s)x(s)ds = t^2. \quad (4)$$

5/6
MATE1SN.doc

On désigne par f l'application de E dans E qui à tout fonction $x \in E$ associe la fonction $f(x)$ de E définie pour tout $t \in [0, 1]$ par

$$f(x)(t) = \int_0^1 (t+s)x(s)ds.$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E , hermitien, de rang fini et montrer qu'il admet pour valeurs propres non nulles

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Montrer que les fonctions $x_1 : s \rightarrow 1 + \sqrt{3}s$ et $x_2 : s \rightarrow 1 - \sqrt{3}s$ constituent une base orthogonale de vecteurs propres de $f(E)$.

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 s^2 x_1(s)ds \text{ et } \int_0^1 s^2 x_2(s)ds$$

et en déduire que si $\rho = \frac{1}{\lambda_1}$ ou $\rho = \frac{1}{\lambda_2}$ l'équation (4) n'a pas de solution.

3. On suppose que $\rho \neq \frac{1}{\lambda_1}$ et $\rho \neq \frac{1}{\lambda_2}$.

a) Montrer que (4) admet une solution unique x_0 et qu'il existe une unique couple $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $s \in [0, 1]$

$$x_0(s) = a + bs + s^2.$$

b) En écrivant que x_0 est solution de (4) montrer que a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} (1 - \frac{\rho}{2})a - \frac{\rho}{3}b = \frac{\rho}{4} \\ -\rho a + (1 - \frac{\rho}{2})b = \frac{\rho}{3} \end{cases}$$

4. Résoudre le système précédent et conclure que pour tout $s \in [0, 1]$

$$x_0(s) = \frac{1}{6} \frac{\rho(\rho - 18)}{\rho^2 + 12\rho - 12} - \frac{\rho(\rho + 4)}{\rho^2 + 12\rho - 12} s + s^2.$$

PREMIERE EPREUVE ECRITE (COMMENTAIRE)

Rapport sur la première épreuve écrite d'admissibilité

I. Thème du sujet

Le cadre général de la théorie des équations intégrales est celui des opérateurs compacts. Cependant, l'étude des équations intégrales restreintes aux opérateurs de rang fini (dans un espace de Hilbert tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini) ne nécessite que les outils d'algèbre linéaire élémentaire, ce qui explique l'origine de ce problème.

II. Observations.

- Quelques exemples et propriétés des opérateurs de rang fini
 - 1.a) Pour établir que le système $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ est libre, il suffisait de constater qu'il est constitué de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. La plupart des candidats ont privilégié des preuves directes par récurrence tout à fait recevables mais malheureusement, beaucoup de ces tentatives sont demeurées infructueuses.
 - 1.b) Pour en déduire que f n'est pas de rang fini, il convenait de préciser l'argument majeur : « l'existence dans $f(E)$ de familles libres de cardinal arbitrairement grand. »
 - 2.a) Il convenait ici d'insister sur l'unicité du « reste » et le degré d'une combinaison linéaire de polynômes de degré n .
 - 2.b) Très souvent, les candidats écrivent sans justification $f(E) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors qu'une inclusion suffit.
 - 3.a) Cette question n'est bien maîtrisée que par les meilleurs candidats.
On rencontre ici notamment l'erreur : $(f + g)(E) = f(E) + g(E)$
 - 3.b) Cette question est assez bien réussie lorsqu'elle est abordée.
 - 3.c) Des rédactions souvent lourdes alors qu'il suffisait d'indiquer $id(E) = E$.
 - 3.d) La conclusion « $F(E) = L(E) \Leftrightarrow \dim E < +\infty$ » a été correctement obtenue.
 - 4.a) Peu de candidats sont capables de donner la démonstration de ce résultat de cours. Certains ont néanmoins précisé avec soin les éléments de ce théorème, ce qui est déjà appréciable.
 - 4.b) Question assez bien réussie.
- Inversibilité de $id_E - f$
 1. Les meilleurs candidats indiquent explicitement l'équivalence entre injectivité et bijectivité en dimension finie. Pour d'autres, la démarche est peu convaincante surtout lorsque aucune distinction n'est faite entre f et f_1 .
Les questions 2. et 3. sont assez bien réussies lorsqu'elles sont abordées, même si les preuves d'existence et d'unicité manquent de netteté. Il convenait bien sûr de conclure à l'inversibilité de $id_E - f$ dès que $\text{Ker}(id_E - f) = \{\vec{0}\}$ et $f \in F(E)$.

- Résolution d'une équation intégrale

1.a) Les candidats oublient souvent de prouver que f est linéaire. Beaucoup établissent l'inclusion $f(E) \subset \text{vect}(e_1, e_2)$ mais ne finalisent pas en indiquant clairement pourquoi (e_1, e_2) est une base de $f(E)$.

1.b) Très peu de candidats ont prouvé $\text{Ker}(id_E - f) = \{\vec{0}\}$.

2.a) Cette question a été largement réussie.

2.b) On note également peu d'erreurs dans la détermination de A et de $(I_2 - A)^{-1}$.

2.c) et 2.d) Peu de candidats ont perçu le rapport à la question 3. et ont souvent donné une expression fautive de la solution x . Certains ont néanmoins trouvé cette expression et même mené à terme le calcul de $x(t)$ dans le cas particulier $y(t) = t^2$.

- Valeurs propres d'un opérateur de rang fini

1. Peu de réponses sont satisfaisantes : beaucoup trop de candidats croient pouvoir utiliser le théorème du rang.

2.a) Les candidats qui abordent cette question confondent presque systématiquement f et f_1 .

2.b) Les déductions demeurent le plus souvent très floues.

3.a) Dans cette question fréquemment abordée, la valeur propre 0 est souvent oubliée.

3.b) Tout comme à la question 2 1.a), peu de démonstrations valables pour établir la liberté de la famille des $(x_k : t \mapsto \cos 2k\pi t)_{1 \leq k \leq n}$. Les candidats qui abordent cette question établissent cependant que les x_k appartiennent à $\text{Ker } f$ et concluent correctement.

Les questions 4. et 5. ont été largement abordées et ont permis aux candidats de faire valoir leurs connaissances sur les espaces préhilbertiens. La question 6. a été très peu traitée.

- Alternative de Fredholm pour un opérateur de rang fini.

1.a) On constate beaucoup de perte de temps sur cette question chez les candidats traitant des questions éparpillées, alors qu'il suffisait de se référer à la partie 3.

La question 1.b) et dans une moindre mesure les questions 1.c) et 1.d) ont permis à certains candidats de gagner quelques points précieux.

La question 2. n'est presque jamais abordée.

- Un exemple d'application.

Beaucoup de candidats sont venus chercher des points dans cet exemple d'application :

Peu ont identifié clairement les différents points à traiter à la question 1.

Beaucoup se sont contentés du calcul des deux intégrales à la question 2.

Certains ont pu exploiter le renseignement $x_0(s) = a + bs + bs^2$ pour établir les résultats des questions 3.b) et 4. Ceux qui ne connaissent pas les formules de Cramer ont écrit des pages de calculs pour bien peu de points.

CAPESA EXTERNE

DEUXIEME EPREUVE ECRITE (SUJET)

**CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
CAPESA
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE**

SESSION 2004

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques

DEUXIEME EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE

Deuxième composition

(Coefficient 2,5 : - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Dans tout le problème, a et b sont deux nombres réels tels que $0 < a < b$.

Dans la première partie, on étudie deux suites construites par récurrence à partir de a et b et convergeant vers un nombre appelé *moyenne arithmético-géométrique* de a et b . On obtient également une majoration permettant de contrôler la « vitesse de convergence » de ces suites. Enfin on étudie un exemple numérique.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de certaines intégrales impropres convergentes. On donne une expression de ces intégrales à l'aide de moyennes arithmético-géométriques appropriées. Cela permet un calcul approché efficace de ces intégrales.

Enfin, dans la troisième partie, on applique les résultats précédents à l'étude des intégrales impropres $\int_y^z \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$ où P est un polynôme du troisième degré à coefficients réels qui est strictement positif sur l'intervalle ouvert $]y, z[$ et où chacune des bornes y et z est soit une racine de P , soit $-\infty$, soit $+\infty$. Dans tous les cas où une telle intégrale existe, on en obtient soit la valeur explicite, soit une expression à l'aide d'une moyenne arithmético-géométrique.

A. Première partie

A.1. On définit par récurrence deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels de la manière suivante :

$a_0 = a$; $b_0 = b$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

A.I.1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 < b_n - a_n \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

A.I.2. Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

A.I.3. Montrer que, quels que soient les entiers naturels p et q , on a $a_p < b_q$.

A.I.4. Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont convergentes, et qu'elles ont la même limite.

Cette limite, qu'on notera $M(a, b)$, est appelée *moyenne arithmético-géométrique* des nombres a et b .

A.I.5. Montrer que, pour tout réel t strictement positif, on a $M(ta, tb) = tM(a, b)$.

A.II. On pose $\rho = \sqrt{\frac{a}{b}}$, $\lambda = \frac{b^2(b-a)}{(b+a)^3}$ et, pour tout entier n ,

$$\rho_n = \sqrt{\frac{a_n}{b_n}} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{b_n^2(b_n - a_n)}{(b_n + a_n)^3}.$$

A.II.1. Donner une expression de ρ_{n+1}^2 en fonction de ρ_n .

A.II.2. Donner une expression de λ_n en fonction de ρ_n .

A.II.3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lambda_{n+1} < \lambda_n^2$. En déduire que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \lambda_n \leq \lambda^{2^n}$$

A.II.4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'erreur relative commise en remplaçant $M(a, b)$ par a_n (c'est-à-dire le nombre $\frac{M(a, b) - a_n}{M(a, b)}$) est majorée par $\frac{1 - \rho_n^2}{1 + \rho_n^2}$.

A.II.5. En déduire que cette erreur relative est majorée par $4 \lambda^{2^n}$.

A.III. Déterminer une valeur approchée de $M(50, 200)$ à 10^{-6} près par défaut.

B. Deuxième partie

B.I.1. Des réels strictement positifs α et β étant fixés, justifier la convergence de l'intégrale impropre

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2)}}.$$

B.I.2. Calculer $I(\alpha, \alpha)$.

B.I.3. On pose

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^{\sqrt{\alpha\beta}} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2)}}.$$

En faisant dans cette intégrale le changement de variable $x \mapsto \frac{\alpha\beta}{x}$, établir une relation entre $I(\alpha, \beta)$ et $J(\alpha, \beta)$ [on justifiera l'utilisation du changement de variable].

B.II.1. En faisant, dans l'intégrale $I(a_1, b_1)$, le changement de variable $x \mapsto \sqrt{x^2 + ab} - x$, prouver que $I(a_1, b_1) = I(a, b)$.

B.II.2. Montrer que, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{\pi}{2b_n} < I(a, b) < \frac{\pi}{2a_n}.$$

B.II.3. En déduire une expression de $I(a, b)$ en fonction de $M(a, b)$.

B.III.1. En appliquant les résultats précédemment obtenus, déterminer une valeur approchée à 10^{-6} près de l'intégrale

$$J_0 = \int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2500)(x^2 + 40000)}}.$$

B.III.2. Dans cette question, on se propose de comparer l'efficacité de la méthode d'approximation précédente avec celle de la classique « méthode des rectangles », appliquée au calcul approché de l'intégrale J_0 . On pose, pour chaque entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$s_n = \frac{100}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{100k}{n}\right)^2 + 2500\right] \left[\left(\frac{100k}{n}\right)^2 + 40000\right]}}$$

et

$$S_n = \frac{100}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{100k}{n}\right)^2 + 2500\right] \left[\left(\frac{100k}{n}\right)^2 + 40000\right]}}.$$

Déterminer une valeur de l'entier n telle que S_n soit une valeur approchée à 10^{-6} près par excès de J_0 . (Le calcul de cette valeur n'est pas demandé.)

B.IV.1.i. Justifier l'existence de l'intégrale

$$K(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x+a^2)(x+b^2)}}.$$

B.IV.1.ii. Démontrer que $K(a, b) = \frac{\pi}{M(a, b)}$

B.IV.2.i. Justifier l'existence de l'intégrale

$$H(a, b) = \int_{-b^2}^{-a^2} \frac{dx}{\sqrt{x(x+a^2)(x+b^2)}}.$$

B.IV.2.ii. Démontrer que $H(a, b) = K(a, b)$.

[On pourra faire dans l'intégrale $H(a, b)$ le changement de variable $x \mapsto -\frac{x+b^2}{x+a^2}$.]

B.V. On considère deux réels s et p vérifiant $|s| < 2p$.

B.V.1. Prouver la convergence de l'intégrale impropre

$$L(s, p) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^4 + sx^2 + p^2)}}.$$

B.V.2. En faisant dans cette intégrale le changement de variable $x \mapsto \frac{p-x^2}{2x}$, prouver l'égalité

$$L(s, p) = \frac{\pi}{2M\left(\frac{1}{2}\sqrt{s+2p}, \sqrt{p}\right)}.$$

[Il pourra être utile de prouver que, si on pose $u = \frac{p-x^2}{2x}$, on a

$$x^4 + p^2 = 2(2u^2 + p)\left(\sqrt{u^2 + p} - u\right)^2.]$$

C. Troisième partie

On considère un polynôme P du troisième degré à coefficients réels.

C.I. Montrer qu'il existe des réels u , v et w (non nécessairement distincts) vérifiant $u \leq v \leq w$ et tels que, quel que soit le réel x , on ait

$$P(x) = 0 \text{ si et seulement si } [x = u \text{ ou } x = v \text{ ou } x = w].$$

C.II. On suppose que le polynôme P est unitaire, c'est-à-dire de la forme $X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$, α , β et γ étant des réels quelconques.

C.II.1. On suppose que $u < v$ et $v = w$. Étudier la convergence de chacune des intégrales

$$\int_u^v \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} \quad \text{et} \quad \int_v^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}.$$

C.II.2. On suppose que $u = v$ et $v < w$. Montrer que l'intégrale

$$\int_w^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

est convergente et calculer sa valeur en fonction de u et w .

CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT CAPESA DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE

C.II.3. On suppose que $u = v = w$, et que P n'a aucune autre racine complexe. Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_u^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

C.II.4. On suppose que $u = v = w$, et que P a au moins une racine complexe non réelle. Montrer que l'intégrale

$$\int_u^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

a un sens et qu'elle peut s'exprimer à l'aide d'une moyenne arithmético-géométrique adéquate.

[On pourra faire dans l'intégrale le changement de variable $x \mapsto \sqrt{x-u}$.]

C.II.5. On suppose que $u < v < w$. Montrer que chacune des intégrales

$$\int_u^v \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} \quad \text{et} \quad \int_w^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$$

a un sens et peut s'exprimer à l'aide d'une moyenne arithmético-géométrique adéquate.

C.III. Reprendre l'étude de la question C.II. en supposant cette fois que P est un polynôme du troisième degré à coefficients réels quelconque (non nécessairement unitaire).

C.IV.1. Donner une expression de l'intégrale

$$A = \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}}$$

à l'aide d'une moyenne arithmético-géométrique.

C.IV.2. Déterminer une valeur approchée de A à 10^{-4} près.

DEUXIEME EPREUVE ECRITE (COMMENTAIRE)

Rapport sur la deuxième épreuve écrite d'admissibilité

La majorité des candidats ont traité les principales questions des parties I et II. Seul un petit nombre d'entre eux ont abordé les premières questions de la partie III.

Dans sa rédaction le candidat doit exposer avec clarté son cheminement de pensée. Certaines phrases sont écrites les unes à la suite des autres sans lien logique. C'est au correcteur de mettre les bonnes conjonctions comme « donc » ou « parce que ».

Lorsque le résultat d'une question est donné dans l'énoncé, il est inutile de faire croire qu'on sait la résoudre par des calculs malhonnêtes.

Les rédactions, y compris dans de bonnes copies, sont souvent trop rapides, certains résultats intermédiaires importants ne sont pas énoncés par exemple dans la partie I, le fait que, pour tout n , a_n et b_n soient strictement positifs.

Très peu de candidats se soucient des signes des nombres ou expressions, faute de quoi certaines démonstrations sont invalides. Par exemple dans l'expression $\sqrt{P(x)}$ peu de candidats ont vérifié que $P(x)$ est positif.

Il est curieux de voir des inégalités larges se transformer en inégalités strictes au cours des calculs sans aucune justification. Parfois même on soustrait des inégalités membre à membre.

On a confondu trop souvent erreur relative et erreur absolue.

Dans ce problème plusieurs raisonnements par récurrence étaient attendus. Il est préférable de montrer, lors de sa première utilisation, qu'on maîtrise ce type de raisonnement, quitte à être plus rapide dans les suivantes plutôt que de faire systématiquement un semblant de démonstration.

De même pour les études de convergence d'intégrales qui font appel au même théorème, on attend du candidat qu'il mette en évidence les particularités des différentes questions.

Dans le cas où il faut montrer la convergence d'une intégrale entre a et b ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$): ne pas oublier de vérifier l'intégrabilité locale de la fonction sur l'intervalle $]a ; b[$ (exemple la question B I 1).

Il n'y a pas forcément de problèmes aux deux bornes de l'intervalle (exemple en 0 pour la question B V 1).

Lorsqu'on utilise des équivalences, il ne faut pas oublier de montrer que les fonctions sont de même signe (exemple en $+\infty$ pour la question B I 1).

Certains raccourcis de rédaction par exemple « $2 > 1$ donc CV par Riemann », ne sont pas acceptables à ce niveau. Certains arguments sont hors sujet, par exemple, à la question BIV2i, « 0 n'appartient pas à $[-a^2 ; -b^2]$ donc pas problème d'intégrabilité en 0 ».

Dans le cas d'un changement de variable le fait d'énoncer des propriétés n'est pas satisfaisant. Par exemple de dire que la fonction est un C^1 -difféomorphisme ne suffit pas, encore faut-il le démontrer (exemple question B II 1). En général les changements de variables qui sont demandés ne sont pas correctement justifiés et leur technique est souvent mal maîtrisée.

CAPESA INTERNE

EPREUVE ECRITE UNIQUE (SUJET)

**CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT
CAPESA
DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE**

SESSION 2004

Concours : INTERNE
Section : Mathématiques

COMPOSITION POUVANT PORTER SUR :
algèbre – analyse – géométrie - probabilités - statistiques

(Coefficient 2 : - Durée : 5 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'épreuve est constituée de trois exercices.

Dans le premier exercice il s'agit d'étudier la convergence de trois suites admettant la même limite. Il débouche sur la comparaison de rapidité de convergence des algorithmes. Il est demandé de faire preuve d'un souci pédagogique, en liaison avec l'enseignement dans les lycées d'enseignement général et technologique agricole. Le deuxième porte sur les lois de probabilités. On étudie l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson puis la modélisation d'un phénomène rare. Le troisième est au départ un problème de géométrie. La deuxième partie est une application à l'étude de variables aléatoires normales et débouche sur une estimation de la variance en statistique inductive.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé, notamment celui des calculatrices de poche à conditions qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

PREMIER EXERCICE

- 1- On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f(x) = x + 1 - \ln^2(x)$.
 - a. Etudier les variations de la fonction f et construire sa représentation graphique dans un repère orthogonal.
 - b. Résoudre dans l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation $f(x) = x$.
- 2- On pose $U_0 = 3$ et, pour tout nombre entier naturel n , $U_{n+1} = f(U_n)$
 - a. Vérifier que l'on définit ainsi une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - b. Placer sur le graphique précédent les points d'abscisses respectives U_0, U_1, U_2 .
 - c. Démontrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et admet pour limite le nombre réel e .
 - d. Déterminer deux nombres réels k et k' tels que :
 $0 < k < k' < 1$ et, pour tout nombre entier naturel n , $0,2k^n < U_n - e < 0,3k'^n$.
 - e. Rédiger un énoncé d'exercice permettant à des élèves d'une classe de série scientifique de lycée de résoudre les questions 2b et 2d.
- 3- On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie pour tout nombre entier naturel n par $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.
 - a. Justifier la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et préciser sa limite.
 - b. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n , $\frac{1}{(n+1)!} < e - S_n < \frac{e}{(n+1)!}$.
 - c. Démontrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x^n n!) = +\infty$.
 - d. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e - S_n}{U_n - e}$.
- 4- On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{\ln x}$.
 Etudier les variations de la fonction g .
- 5- On pose $V_0 = 3$ et, pour tout nombre entier naturel n , $V_{n+1} = g(V_n)$.
 - a. Vérifier que l'on définit ainsi une suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - b. Démontrer que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et admet pour limite le nombre réel e .
 - c. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n ,
 $0 < V_{n+1} - e \leq (\ln V_n - 1)(V_n - e)$ et $\ln V_n - 1 \leq \frac{V_n - e}{e}$.
 - d. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n , $V_n - e < \frac{1}{2^n n!}$.
 - e. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e - S_n}{V_n - e}$.

- 6- Comparer les vitesses de convergence des trois suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

DEUXIEME EXERCICE

Les deux parties sont indépendantes.

PARTIE A : Loi de Poisson, convergence d'une suite de variables aléatoires de lois binomiales.

Définition : On considère une suite de variables aléatoires discrètes X_n définies sur un univers Ω tel que $X_n(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire définie sur le même univers Ω tel que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. La suite de variables aléatoires (X_n) converge en loi vers la variable aléatoire X si pour tout nombre entier naturel k ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = P(X = k).$$

m désigne un nombre réel strictement positif et k un nombre entier naturel.

1-

- a. On considère la suite $(U_n)_{n > m}$ définie par $U_n = \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n$.

Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n > m}$.

- b. On considère la suite $(V_n)_{n > \max(k, m)}$ définie par $V_n = \frac{n!}{(n-m)^k (n-k)!}$.

Démontrer que la suite $(V_n)_{n > \max(k, m)}$ est convergente et admet pour limite 1.

- 2- On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n > m}$ telle que pour chaque entier n , X_n est distribuée

suivant la loi binomiale $B\left(n, \frac{m}{n}\right)$. On pose $p_{k,n} = P(X_n = k)$.

- a. Exprimer $p_{k,n}$ en fonction de n , k et m .
- b. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{k,n}$. (On pourra utiliser les résultats précédents)
- c. En déduire que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n > m}$ converge en loi vers une variable aléatoire X distribuée suivant une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

PARTIE B : Processus de Poisson

Objet : Modélisation d'un phénomène rare dépendant d'un paramètre k ($k \in \mathbb{R}_+^*$).

Pour un instant t donné, on veut établir la loi de probabilité de la variable aléatoire discrète Y_t prenant pour valeur le nombre de réalisations du phénomène sur l'intervalle de temps $[0, t]$.

On note p_n , la fonction qui associe à tout nombre réel positif t la probabilité $p_n(t) = P(Y_t = n)$ pour que le phénomène se produise n fois dans l'intervalle $[0, t]$.

On traduit le phénomène en considérant que la suite de fonctions $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les équations différentielles suivantes :

$$(E_n) \quad \frac{dp_n}{dt} + k p_n = k p_{n-1} \text{ si } n > 0$$

$$\text{et} \quad \frac{dp_0}{dt} + k p_0 = 0.$$

Les conditions initiales sont données par $p_0(0) = 1$ et pour $n > 0$, $p_n(0) = 0$.

- 1- Déterminer la fonction p_0 .
- 2- Résoudre l'équation différentielle (E_n) pour $n = 1$ et $n = 2$.
- 3- Résoudre en utilisant un raisonnement par récurrence l'équation différentielle (E_n) pour n entier naturel quelconque.

En déduire que la variable aléatoire Y_t est distribuée suivant une loi de Poisson.

TROISIEME EXERCICE

n désigne un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2.

PARTIE A

$\mathcal{E}$ désigne un espace affine euclidien de dimension supérieure ou égale à 3.

On considère 4 points de $\mathcal{E}$, O, A_1, A_2, A_3 , tels que $(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3})$ constitue un système orthonormal.

On désigne par G_2 le milieu du segment $[A_1, A_2]$ et par G_3 le barycentre des points A_1, A_2, A_3 affectés de coefficients égaux.

- 1- Pour $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$, $i \neq j$, calculer les longueurs $A_i A_j$. Calculer $G_2 A_1$, $G_2 A_2$.

En déduire la valeur de $G_2 A_1^2 + G_2 A_2^2$.

2-

a. Quelle est la nature du triangle $A_1 A_2 A_3$? Faire une figure représentant A_1, A_2, A_3, G_2, G_3 .

b. Calculer les longueurs $G_2 A_3$, $G_3 A_3$.

En déduire la valeur de $G_3 A_1^2 + G_3 A_2^2 + G_3 A_3^2$.

- 3- On se place dans le cas où $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n points quelconques.

Pour tout nombre entier i compris entre 1 et n , G_i désigne le barycentre des points $A_1, A_2, \dots, A_i$ à coefficients égaux.

a. Démontrer que, pour tout nombre entier p , $1 \leq p \leq n-1$, $\sum_{i=1}^p G_{p+1} A_i^2 = p G_{p+1} G_p^2 + \sum_{i=1}^p G_p A_i^2$.

b. Déterminer une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{G_{p+1} A_{p+1}}$ et $\overrightarrow{G_{p+1} G_p}$.

En déduire $\sum_{i=1}^{p+1} G_{p+1} A_i^2 = (p^2 + p) G_{p+1} G_p^2 + \sum_{i=1}^p G_p A_i^2$.

PARTIE B

Soit $X_1, X_2, \dots, X_n$, un échantillon gaussien, les différentes variables aléatoires X_i étant indépendantes de même loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$; μ et σ^2 étant respectivement l'espérance mathématique et la variance commune.

Pour tout nombre entier p compris entre 1 et n , on pose $\bar{X}_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p X_i$.

Pour toute variable aléatoire X , $E(X)$ désigne son espérance mathématique.

- 1- En représentant $X_1, X_2, \dots, X_n$ comme n points d'une droite et en s'appuyant sur les résultats de la partie A, démontrer que pour tout nombre entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$,

$$\sum_{i=1}^{p+1} (X_i - \bar{X}_{p+1})^2 = (p^2 + p)(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^2 + \sum_{i=1}^p (X_i - \bar{X}_p)^2.$$

En déduire :

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \sum_{p=1}^{n-1} p(p+1)(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^2.$$

2-

- a. Pour i et j entiers distincts tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, vérifier que :

$$E(X_i X_j) = \mu^2 \text{ et } E(X_i^2) = \mu^2 + \sigma^2.$$

- b. X et Y désigne deux variables aléatoires, combinaisons linéaires de $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Il existe donc $2n$ nombres réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ tels que $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i$, $Y = \sum_{i=1}^n \beta_i X_i$.

On suppose que X et Y sont centrées (d'espérance mathématique nulle).

Vérifier que $\mu \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$.

Démontrer que $E(XY) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$, $E(X^2) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$.

3-

- a. Vérifier que pour tout nombre entier p tel que $1 \leq p \leq n-1$,

$$E(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p) = 0 \text{ et } \bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p = \frac{-1}{p(p+1)} (X_1 + X_2 + \dots + X_p - pX_{p+1}).$$

- b. Pour p et q entiers tels que $1 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$ et $p \neq q$, démontrer que :

$$E[(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)(\bar{X}_{q+1} - \bar{X}_q)] = 0.$$

Calculer $E[(\bar{X}_{p+1} - \bar{X}_p)^2]$.

CONCOURS DE RECRUTEMENT AU PROFESSORAT CAPESA DE L'ENSEIGNEMENT DU SECOND DEGRE AGRICOLE

- 4- Déduire des questions précédentes l'expression de $(n-1)$ variables aléatoires $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$, en combinaison linéaire de $X_1, X_2, \dots, X_n$, centrées, réduites (de variance égale à 1), non corrélées deux à deux telles que

$$\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n-1} U_i^2.$$

En déduire l'espérance mathématique de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \bar{X}_n)^2}{\sigma^2}$.

On admet que les variables aléatoires $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$ sont gaussiennes et indépendantes.

5-

Définition : Une variable aléatoire réelle est distribuée suivant la loi de Khi-deux à n degrés de libertés si elle est la somme des carrés de n variables aléatoires réelles gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes.

On pose $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$.

Déduire des questions précédentes que la variable aléatoire $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ est distribuée suivant la loi de Khi-deux à $(n-1)$ degrés de libertés.

Déterminer l'espérance mathématique de S^2 .

EPREUVE ECRITE INTERNE (COMMENTAIRE)

Construite autour de trois thèmes (convergence de suites numériques, convergence en loi d'une suite de variables aléatoires binomiales et modélisation d'un phénomène rare, variance d'un échantillon gaussien), cette épreuve devait permettre aux candidats de faire valoir leurs connaissances. Moins d'un tiers d'entre eux y est parvenu ; la moyenne et l'écart type des notes attribuées étant respectivement égaux à 9,1 et 4,1. Dans l'ensemble, le jury a noté un manque de rigueur dans la conduite des raisonnements. Cependant, il tient à signaler la présentation soignée des copies.

Exercice 1 :

L'exercice traitait de la convergence de trois suites vers e . Il débouchait sur une étude comparative de rapidité de convergence.

Les items 1, 2, 4 et 5, relevant du niveau d'une classe de série scientifique de lycée, sont assez bien traités. Toutefois, trop peu de candidats proposent un énoncé d'exercice portant sur l'item 2.

Peu de candidats vérifient que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies

$(u_n \geq e \text{ et } v_n \geq e)$. Les inégalités, permettant d'obtenir les limites de ces suites, ne sont pas toujours établies avec rigueur.

Exercice 2 :

Partie A : Bon nombre de candidats se contentent de donner, sans le justifier, les limites des suites (u_n) et (v_n) .

Rappelée en début d'exercice, la notion de convergence en loi n'est pas toujours maîtrisée.

La partie B est, dans l'ensemble, bien traitée. Mais quelques candidats oublient le coefficient k du second membre de l'équation différentielle (E_n) . Cela ne les trouble point pour conclure que la solution p_n définit une loi de Poisson.

Exercice 3 :

L'exercice basé sur des propriétés de produit scalaire se composait de deux parties. Dans la partie A, il s'agissait de démontrer des résultats simples de géométrie métrique d'abord dans le plan puis dans l'espace. La partie B était une généralisation des résultats de la partie A à un espace vectoriel euclidien engendré par n variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, deux à deux indépendantes.

Il débouchait sur un résultat classique de statistique inductive : Dans le cas d'un échantillon gaussien, la variable aléatoire $\frac{nS^2}{\sigma^2}$ est distribuée suivant la loi de Khi-deux à $(n-1)$ degrés de libertés.

Cet exercice, sûrement par manque de temps, est peu traité par les candidats. Ceux qui l'ont abordé ont essentiellement traité la partie A qui ne présentait pas de difficulté. Cependant, la figure demandée n'est pas toujours exacte et les formules de l'item 3 ne sont pas toujours établies avec rigueur.

La partie B, qui portait sur la variance S^2 d'un échantillon gaussien, a permis de valoriser les quelques rares candidats qui l'ont abordée.

**LES EPREUVES ORALES:
REMARQUES GENERALES,
LISTES DES QUESTIONS,
COMMENTAIRES.**

REMARQUES GENERALES

I. Remarques communes aux quatre concours sur les comportements à l'oral:

1°) Les candidats, le public:

La présidence a observé cette année une amélioration de l'attitude des candidats. A quelques exceptions près, la politesse, la présentation et la tenue vestimentaire se sont améliorées.

De façon exceptionnelle, la présidence a tout de même déploré un excès de décontraction (candidats assis par terre), un langage familier ou incorrect chez certains candidats qui oublient qu'ils postulent pour devenir entre autres des éducateurs.

Les oraux sont publics: les "spectateurs" sont autorisés à assister à un nombre limité d'épreuves à condition qu'ils montrent une discrétion respectant le travail et la concentration de chacun et qu'ils se présentent dans une tenue vestimentaire correcte. Les membres de la Présidence sont fondés à vérifier les identités.

2°) L'accueil par la Présidence:

Chaque candidat est accueilli par la Présidence 10 à 15 minutes avant son entrée en salle de préparation (ou en jury pour les candidats internes) pour tirer au sort ou recevoir son (ou ses) sujet(s) d'épreuve. Cette prise de contact personnelle d'un ou plusieurs membre(s) de la Présidence avec les candidats, individuellement ou par groupe, permet de rappeler les modalités du concours, de rassurer les candidats, de répondre à leurs questions et de leur donner quelques conseils de bon sens tout en donnant un aspect humain au concours.

Les candidats **doivent se montrer attentifs** lors de ces dernières recommandations: elles sont précieuses et leur évitent des hésitations inutiles en salle de préparation ou devant le jury.

3°) L'évaluation à l'oral des aptitudes professionnelles:

La ou les épreuves orales se prête(nt) à une évaluation spécifique de **l'aptitude au métier d'enseignant:**

- les qualités de communication, d'élocution,
 - la voix claire et posée, le langage correct (éviter "on a que"...),
 - le discours structuré, convaincant, dynamique, captant l'attention des membres du jury,
 - la maîtrise de la langue française ("un" et "le"; "et" et "ou"...) et du vocabulaire scientifique,
 - la rigueur et la précision des mots et des énoncés,
 - **la bonne gestion du tableau** (savoir utiliser un tableau, ne pas trop écrire, bien le présenter, utiliser différentes couleurs),
 - **l'autonomie par rapport aux notes** de préparation,
 - la capacité de s'adresser au jury et non au tableau,
- sont autant d'éléments que le jury apprécie.

Le candidat qui, uniquement tourné vers le tableau, finit par ne plus du tout **regarder le jury** est naturellement sanctionné.

II. Remarques sur les notes obtenues à l'oral par les candidats au CAPESA externe public:

L'observation des résultats chiffrés montre que **l'oral est prépondérant pour le classement final:**

- à la session 2000, aucun des candidats externes ayant le meilleur total d'écrit n'était classé sur liste principale à l'admission. Seuls trois d'entre eux étaient sur la liste complémentaire.
- à la session 2001, aucun des candidats externes ayant le meilleur total d'écrit n'était classé sur liste principale à l'admission. Seuls deux d'entre eux étaient sur la liste complémentaire.
- à la session 2002, aucun des candidats externes ayant le meilleur total d'écrit n'était classé sur liste principale à l'admission. Seul un d'entre eux était sur la liste complémentaire.
- à la session 2004, le candidat externe ayant le meilleur total d'écrit n'est classé que sur liste complémentaire. Sur liste principale, on ne retrouve que deux "bons" totaux d'écrit.

Cette observation traduit une insuffisance de la préparation des candidats aux épreuves orales ; tout se passe comme si certains d'entre eux venaient sans s'être réellement préparés, et ne sachant pas en conséquence utiliser de manière efficace leurs deux heures de préparation.

En revanche, on voit, à chaque session, des candidats ayant un écrit faible remonter dans le classement grâce à leurs prestations orales: **en 2004, des candidats proches de la barre d'écrit sont classés en bonne place sur la liste principale.**

III. Remarques sur les choix des candidats externes:

Le jury, depuis plusieurs sessions, constate que certains candidats externes négligent l'aspect stratégique d'un choix pertinent du sujet traité à la première épreuve orale; en effet les thèmes de la deuxième épreuve sont complémentaires de ceux de la première: éliminer d'emblée un sujet non maîtrisé (le plus souvent en probabilités ou surtout en statistiques) à la première épreuve peut occasionner des "dégâts" plus importants à la deuxième épreuve. Certains candidats savent toutefois s'en "débarrasser" habilement (et même brillamment) dès la première épreuve.

Remarque sur les probabilités et statistiques:

Chaque concours possède un profil. Les candidats aux CAPESA de mathématiques doivent être conscients que **l'Enseignement agricole prend largement appui sur les probabilités et statistiques** (échantillonnage, estimation, régression...) **et que ce concours suppose une préparation spécifique à cet oral spécifique.** Il est fréquent que soit proposé au candidat le choix entre deux dossiers de probabilités ou de statistiques à la deuxième épreuve.

Remarque sur les programmes spécifiques:

- des filières technologiques agricoles (STAE-STPA): elles ont un programme spécifique proche de celui des filières techniques de l'Education nationale, mais suffisamment différent pour qu'un candidat motivé les étudie sérieusement.
- des classes de BTSA: l'Enseignement agricole propose de nombreuses formations variées au niveau BTS. Les programmes de ces classes sont spécifiques et méritent des révisions approfondies.

Première Epreuve Orale d'Admission (concours externes):

Liste des questions

01. Utilisation d'arbres, de tableaux, de diagrammes pour des exemples simples de dénombrement.
02. Dénombrement des combinaisons. Exemples de situations dont l'étude se ramène à ce cas.
03. Formule du binôme. Propriétés des coefficients binomiaux. Applications.
04. Description mathématique d'une expérience aléatoire: ensemble des événements élémentaires, événements, probabilité (on se limitera au cas où l'ensemble d'événements élémentaires est fini).
05. Probabilité conditionnelle; indépendance de deux événements (on se limitera au cas où l'ensemble d'événements élémentaires est fini). Applications à des calculs de probabilité.
06. Formule des probabilités totales. Formule de BAYES. Exemples.
07. Variable aléatoire réelle discrète. Loi de probabilité. Fonction de répartition. Espérance mathématique et variance. Exemples.
08. Variable aléatoire réelle à densité. Fonction de répartition. Espérance mathématique et variance. Exemples.
09. Loi de probabilité d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes. Loïs marginales. Indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes. Exemples.
10. Variable aléatoire de loi de Bernoulli. Variable aléatoire de loi binomiale. Espérance mathématique et variance. Exemples.
11. Variable aléatoire de loi de Poisson. Espérance mathématique et variance. Exemples.
12. Variable aléatoire de loi normale (ou de Laplace-Gauss). Variable centrée réduite associée. Exemples.
13. Séries statistiques doubles. Ajustement par la méthode des moindres carrés. Qualité de l'ajustement.
14. PGCD et PPCM de deux entiers naturels. Nombres premiers entre eux. Applications.
15. Nombres premiers. Infinitude de nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers.

16. Suites convergentes. Comparaison, opérations algébriques, composition par une fonction continue.

17. Suites monotones, suites adjacentes. Application à l'approximation d'un nombre réel, au développement décimal.

18. Suites arithmétiques, suites géométriques (convergence, somme des n premiers termes,...). Exemples d'applications, notamment: application à l'actualisation. Taux actuariel.

19. Limite d'une fonction à valeurs réelles en un point a de $\mathbb{R}$. Énoncés usuels sur les limites : comparaison, opérations algébriques, composition. Exemples.

20. Fonctions à valeurs réelles continues en un point a de $\mathbb{R}$. Opérations algébriques, composition. Prolongement par continuité d'une fonction en un point. Image d'une suite convergente par une fonction continue.

21. Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Propriétés. Exemples.

22. Nombre dérivé d'une fonction en un point. Interprétations de ce nombre. Exemples.

23. Fonctions dérivées. Opérations algébriques. Dérivée d'une fonction composée. Exemples.

24. Courbe définie par des équations paramétriques dans le plan. Vecteur dérivé et tangente. Interprétation cinématique.

25. Caractérisation de la fonction exponentielle réelle $x \mapsto e^{ax}$, où a appartient à $\mathbb{R}$, par l'équation différentielle $y' = ay$ et une condition initiale. Applications.

26. Étude des développements limités d'ordre 1 en 0 des fonctions :

$x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$. Applications.

27. Applications du calcul différentiel à la recherche d'extremums (maximum et minimum) d'une fonction numérique d'une variable réelle. Exemples.

28. Inégalité des accroissements finis. Exemples d'applications à l'étude de suites et de fonctions.

29. Définition, étude et propriétés de la fonction logarithme népérien. Exemples d'intervention.

30. Définition, étude et propriétés de la fonction exponentielle de base e . Exemples d'intervention.

31. Croissance comparée des fonctions : $x \mapsto e^x$, $x \mapsto x^a$, $x \mapsto \ln x$ au voisinage de $+\infty$. Applications.
32. Caractérisation des fonctions réelles $x \mapsto x^a$, où a appartient à $\mathbb{R}$, comme solutions continues de l'équation fonctionnelle: $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$. Applications.
33. Caractérisation des fonctions exponentielles réelles comme solutions continues de l'équation fonctionnelle: $f(x + y) = f(x) \times f(y)$. Applications.
34. Primitives d'une fonction continue sur un intervalle ; définition et propriétés de l'intégrale, inégalité de la moyenne. Applications.
35. Calculs d'intégrales. Intégration par parties. Exemples de changement de variable. Applications.
36. Résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants, sans second membre. Exemples d'applications.
37. Equations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients non constants. Exemples de recherche de solutions approchées par la méthode d'Euler.
38. Fonctions numériques de deux ou trois variables réelles: dérivées partielles, différentielle, différentielle totale exacte. Exemples.
39. Fonctions polynômes à une variable. Critère pour qu'une telle fonction soit nulle. Dégré, factorisation par $(x - a)$. Applications.
40. Fonction polynomiale du second degré à coefficients réels. Mise sous forme canonique. Application à l'étude du sens de variation et à la représentation graphique de la fonction. Equations et inéquations du second degré.
41. Introduction et construction du corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes; propriétés algébriques, conjugaison, représentation géométrique (module, argument). Applications.
42. Racines n -ièmes d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Applications.
43. Notation exponentielle des nombres complexes. Formule de Moivre, formules d'Euler. Applications à la trigonométrie, à l'analyse et à la géométrie.
44. Représentation géométrique des nombres complexes. Interprétation géométrique des applications $z \mapsto \bar{z}$, $z \mapsto z + b$, $z \mapsto az$, où a et b appartiennent à $\mathbb{C}$, a non nul. Exemples d'application à l'étude de configurations géométriques du plan.
45. Caractérisation vectorielle d'une droite du plan. Représentations paramétriques. Génération des demi-droites, des segments. Parallélisme, points alignés, orthogonalité.

46. Equations cartésiennes d'une droite dans le plan. Problèmes d'intersection, parallélisme. Condition pour que trois droites soient concourantes. Cas du plan euclidien: vecteur normal, orthogonalité...

47. Théorème de Thalès. Projection dans le plan et dans l'espace, caractère affine des projections. Applications à des configurations usuelles.

48. Homothéties et translations du plan. Transformation vectorielle associée. Invariants élémentaires : effet sur les directions, l'alignement, les distances, les angles. Applications à l'action sur les configurations usuelles.

49. Réflexions du plan échangeant deux points donnés; médiatrice, régionnement associé. Applications au triangle et au cercle (cercle circonscrit, angle inscrit,...).

50. Réflexions du plan échangeant deux droites sécantes données, bissectrices. Applications au triangle et au cercle (cercle inscrit, tangentes à un cercle,...).

51. Groupe des isométries du plan: décomposition d'une isométrie en produit de réflexions, groupe des déplacements, classification des isométries à partir de l'ensemble des points invariants.

52. Droites remarquables dans le triangle : médiatrices, hauteurs, médianes, bissectrices,... Concours. Exemples d'études analogues pour le tétraèdre.

53. Le cercle. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Point de vue géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vue.

54. Définition et propriétés du produit scalaire dans le plan; expression dans une base orthonormale, application au calcul de distances et d'angles.

55. Applications du produit scalaire et du produit vectoriel dans l'espace orienté: calculs de distances, d'aires, de volumes, d'angles...

56. Relations métriques dans un triangle rectangle. Trigonométrie. Applications.

57. Relations métriques et trigonométriques dans un triangle quelconque. Applications.

58. Définition et propriétés du barycentre de n points pondérés. Associativité. Application à la détermination de barycentres attachés à des configurations usuelles du plan et de l'espace.

59. Réflexions et rotations du plan. Invariants élémentaires. Effet sur les distances, l'alignement, les angles. Application à l'action sur les configurations usuelles.

60. Triangles isométriques, triangles de même forme.

61. Dans le plan, composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre ; effet sur les distances ; conservation des angles orientés. Similitudes directes. Ecriture complexe. Groupe des similitudes directes. Applications.

62. Ellipse déduite d'un cercle par affinité orthogonale. Applications (en particulier, projection orthogonale d'un cercle sur un plan).

63. Définitions de la parabole, géométriquement et par équation réduite; équivalence entre ces définitions. Construction de la tangente et de la normale en un point.

64. Définitions de l'ellipse, géométriquement et par équation réduite; équivalence entre ces définitions.

65. Définitions de l'hyperbole, géométriquement et par équation réduite; équivalence entre ces définitions.

Première Epreuve Orale d'Admission (concours externes):

Recommandations:

a) Bien lire le sujet (tous les mots et **l'ordre** de ces mots y ont leur importance) et **regarder avec attention dans les programmes** (qui fournissent des pistes de réflexion) **ce qu'il représente**. Une bonne connaissance préalable des **documents d'accompagnement des programmes** est fructueuse.

b) Préparer un exposé bien structuré.

c) Bien situer le cadre et le niveau de l'exposé, en particulier, les pré-requis.

d) Le recours à des notions hors programme n'est pas une faute en soi ; mais il est souvent risqué car le candidat est alors interrogé à ce niveau. Il est préférable se situer à un niveau modeste si c'est celui que l'on maîtrise le mieux. Le jury n'est pas impressionné par l'énoncé de théorèmes savants, surtout lorsqu'ils ne correspondent pas aux objectifs de l'épreuve : rappelons que le programme de cette épreuve est centré autour des programmes des lycées et collèges.

e) Bien gérer le temps: une durée de 25 minutes peut être courte, dans cette première épreuve, pour certains sujets.

f) Montrer que l'on maîtrise les fondements des notions qu'on expose: le jury observe en effet de nombreuses lacunes, principalement en probabilités et statistiques. Penser à la spécificité de ce concours.

g) Ne pas négliger les exemples ni les applications. Un exposé, même irréprochable, des seuls aspects théoriques d'un sujet sera pénalisé.

h) Employer un **vocabulaire et des notations rigoureuses**, particulièrement en géométrie et en probabilités: Ω et $X(\Omega)$, Ω et $P(\Omega)$... sans parler de confusions inacceptables telles que f et $f(x)$.

i) Ne pas négliger les diagrammes (probabilités...), les graphiques, les illustrations, les **figures de géométrie**, éventuellement l'utilisation des **instruments de géométrie** ou les applications faisant intervenir **la calculatrice**.

Deuxième Epreuve Orale d'Admission (concours externes):
Liste des questions

01. Utilisation de l'échantillonnage pour estimer une moyenne en statistique inférentielle.
02. Introduction de la notion de probabilité en classe de Première.
03. Utilisation de l'échantillonnage pour estimer une proportion en statistique inférentielle.
04. Description mathématique d'expériences aléatoires : éventualités, événements élémentaires, événements, probabilité.
05. Introduction au dénombrement et applications au calcul de probabilités sur un ensemble fini, conformément aux programmes des classes de Terminales.
06. Utilisation de la calculatrice en Statistique.
07. Exemples d'organisation et d'étude d'une série statistique à une variable: détermination, comparaison, utilisation de mesures de tendance centrale (paramètres de position) et de mesures de dispersion (paramètres de dispersion). Regroupements en classes. Représentations graphiques usuelles. Interprétations.
08. Variable aléatoire de loi normale. Applications.
09. Variable aléatoire de loi binomiale; approximations d'une loi binomiale.
10. Variable aléatoire de loi de Poisson. Applications.
11. Probabilités conditionnelles. Evénements indépendants. Applications.
12. Statistique à deux variables: corrélation, régression linéaire. Utilisation de changements de variables.
13. Evénements indépendants. Applications.
14. Notion de variable aléatoire continue, fonction de répartition. Applications.
15. Exemples d'expériences aléatoires et de calcul de probabilités attachées à ces expériences, conformément au programme de la filière STAE-STPA.
16. Exemples d'introduction à la fluctuation d'échantillonnage, notamment par le moyen de simulations.
17. Utilisation des lois normales en statistiques et probabilités.
18. Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire réelle.
19. Echantillonnage: variables aléatoires usuelles associées.

20. Variables aléatoires discrètes: loi de probabilité, fonction de répartition, paramètres....

21. Statistique à deux variables: ajustement par des méthodes graphiques, échelles fonctionnelles.

22. Expériences aléatoires: modèles d'urne.

23. Dénombrements: addition et multiplication; applications aux probabilités.

24. Exemples simples de problèmes de dénombrement dans différentes situations.

25. Exemples de mises en œuvre de tests de conformité à une moyenne, à une proportion: hypothèses, risque, valeurs critiques, règle de décision.

26. Exemples d'étude, dans les classes de Seconde et Première, de problèmes conduisant à une équation ou une inéquation du second degré.

27. Exemples d'étude de situations conduisant à un système d'équations linéaires.

28. Exemples d'étude de situations conduisant à des régionnements de la droite ou du plan à partir d'inéquations du premier ou du second degré.

29. Exemples d'emploi des nombres complexes dans des situations diverses issues des mathématiques, de la physique...

30. Exemples de présentations et d'utilisations des repérages en Lycée, de la Seconde à la classe de BTSA.

31. Exemples d'emploi des nombres complexes pour l'étude de configurations en géométrie plane.

32. Exemples de présentation d'exercices introduisant et utilisant le cercle trigonométrique. Notion de mesures d'un angle orienté. Mesure principale.

33. Exemples d'emploi d'homothéties et de translations pour l'étude de problèmes d'alignement et de concours dans le plan.

34. Exemples d'emploi d'homothéties et de translations pour l'étude de problèmes de constructions géométriques dans le plan.

35. Exemples d'emploi des transformations pour la recherche de lieux géométriques du plan.

36. Exemples d'études de courbes paramétrées du plan.

37. Exemples d'emploi du produit scalaire pour le calcul de distances, d'angles et d'aires dans les configurations usuelles du plan (triangles, polygones,...).

38. Exemples d'emploi du produit scalaire pour le calcul de distances, angles, aires, volumes, dans les configurations usuelles de l'espace (parallélépipède, tétraèdre, pyramide,...).
39. Exemples d'emploi du produit scalaire pour la recherche de lieux géométriques dans le plan.
40. Exemples d'emploi des barycentres pour l'étude de configurations du plan et de l'espace ou la recherche de lieux géométriques.
41. Exemples de recherches et de représentations de sections planes de solides usuels.
42. Exemples de problèmes d'alignement et de concours portant sur le triangle.
43. Exemples d'études de configurations faisant l'objet de constructions géométriques à la règle et au compas.
44. Exemples de présentation, au niveau Lycée, de droites remarquables du tétraèdre: concours des médianes, condition de concours des hauteurs; cas du tétraèdre régulier.
45. Analyse comparée de différentes méthodes (calcul vectoriel, transformations, emploi d'un repère, nombres complexes...) pour la recherche d'un même problème de lieu géométrique du plan.
46. Exemples d'illustrations, à l'aide de contre-exemples, de l'importance de la vérification des hypothèses lors de l'emploi d'un théorème.
47. Exemples de présentation, en séance de travaux dirigés ou de module, d'activités d'introduction de la distribution des fréquences d'une série et d'observation de la notion de fluctuation d'échantillonnage.
48. Exemples de présentation, en séance de travaux dirigés, d'exercices sur la mise en œuvre de la méthode d'Euler. Application à la fonction exponentielle.
49. Exemples d'approches et d'applications du raisonnement par récurrence, dans des domaines variés, dans les classes de Première et de Terminale.
50. Exemples d'emploi de suites pour l'approximation d'un nombre.
51. Exemples d'étude de problèmes conduisant à des suites géométriques ou arithmétiques.
52. Exemples de recherche de solutions approchées d'une équation numérique.
53. Exemples de méthodes d'approximation, à l'aide de suites, d'un nombre réel positif; exemples numériques.

54. Exemples d'étude de suites définies par récurrence.

55. Exemples d'études de situations décrites au moyen de fonctions (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale...).

56. Obtention, en classe de Première, de l'étude et de la représentation graphique de fonctions telles que $f + \lambda$, λf , $x \mapsto f(x + \lambda)$, $x \mapsto f(\lambda x)$, $|f|$, à partir de celle d'une fonction f .

57. Exemples d'étude du comportement local d'une fonction (approximation par une fonction affine, discontinuité...). Applications.

58. Exemples d'étude du sens de variation d'une fonction, de la recherche des extremums, de la détermination de son signe, de la position relative de deux courbes.

59. Exemples d'étude du comportement asymptotique d'une fonction. Applications.

60. Exemples de mise en évidence de la relation entre la monotonie de la dérivée d'une fonction et la position de sa courbe représentative par rapport aux tangentes.

61. Exemples de calculs d'aires planes à l'aide du calcul intégral.

62. Exemples d'emploi du calcul intégral pour le calcul de grandeurs relatives à la géométrie, à la mécanique, ou aux probabilités.

63. Exemples d'étude de situations (issues de la géométrie, des sciences physiques et biologiques, de la vie économique et sociale...) conduisant à une fonction logarithme ou exponentielle.

64. Exemples de résolutions d'équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants, avec ou sans second membre.

65. Exemples de résolutions d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre.

66. Exemples de problèmes (issus des mathématiques, des sciences physiques ou biologiques, de la vie économique et sociale) conduisant à une équation différentielle.

67. Exemples d'utilisation des nombres complexes pour la résolution d'équations algébriques ou différentielles.

Deuxième Epreuve Orale d'Admission (concours externes):

Exemples de présentation des dossiers

CAPESA DE MATHÉMATIQUES ÉPREUVE SUR DOSSIER

DOSSIER N° 02

Question : Présenter un choix d'exemples et d'exercices sur le thème suivant :

Introduction de la notion de probabilité en classe de Première.

Références aux programmes : Extraits de programmes de Premières:

Premières STAE-STPA:

- événement, événement élémentaire, éventualité.
- La probabilité d'un événement est définie par addition de probabilités d'événements élémentaires.
- Événements incompatibles, événement contraire d'un événement, réunion et intersection de deux événements;
- Cas où les événements élémentaires sont équiprobables.

Première S.

Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini. Espérance, variance, écart-type d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement, de la réunion et de l'intersection d'événements. Cas de l'équiprobabilité.

L'objectif est de saisir la démarche du calcul de probabilités. On se limitera donc à des situations simples d'organisation et de dénombrement élémentaire des données sans utiliser l'analyse combinatoire, qui est hors programme en Première.

Le lien entre loi de probabilité et distributions de fréquence sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. On expliquera ainsi la convergence des moyennes vers l'espérance et des variances empiriques vers les variances théoriques; on illustrera ceci par des simulations dans des cas simples.

Documentation conseillée:

Ouvrages scolaires de Premières technologiques, STAE-STPA, ou scientifiques.

Consignes pour l'épreuve :

Pendant votre préparation (deux heures), vous devrez rédiger **sur les fiches mises à votre disposition**, un résumé des commentaires que vous développerez dans votre exposé et **les énoncés** de vos exercices. La qualité de ces fiches interviendra dans l'appréciation de votre épreuve.

L'épreuve dure 55 minutes maximum:

Vous expliquerez dans votre exposé (25 minutes maximum) la façon dont vous avez compris le sujet et les objectifs recherchés dans les exercices présentés : acquisition de connaissances, de méthodes, de techniques, évaluation. Vous analyserez la pertinence des différents outils mis en jeu. Cet exposé est suivi d'un entretien (30 minutes maximum).

CAPESA DE MATHÉMATIQUES ÉPREUVE SUR DOSSIER

DOSSIER N°08

Question : Présenter un choix d'exemples et d'exercices sur le thème suivant :

Variable aléatoire de loi normale. Applications.

Références aux programmes : extraits de programmes.

<u>Terminale STAE-STPA:</u> Variable aléatoire de loi normale: description, illustrations graphiques, lectures de tables.	Effectuer, <u>graphique à l'appui</u> , des lectures de la table de la loi normale centrée réduite: passage à $\frac{X - \mu}{\sigma}$, calcul de $p(X \leq a)$, de $p(a \leq X \leq b)$.
<u>BTSA (module D11):</u> Utiliser les notions de statistique en vue d'une modélisation a priori.	Variables aléatoires et lois de probabilité: . loi normale Approximation d'une loi binomiale: - par une loi de Poisson, - par une loi normale.

Documentation conseillée :

Ouvrages scolaires de Terminale STAE-STPA, de BTS et de BTSA.

Consignes pour l'épreuve :

Pendant votre préparation (deux heures), vous devrez rédiger **sur les fiches mises à votre disposition**, un résumé des commentaires que vous développerez dans votre exposé et **les énoncés** de vos exercices. La qualité de ces fiches interviendra dans l'appréciation de votre épreuve.

L'épreuve dure 55 minutes maximum:

Vous expliquerez dans votre exposé (25 minutes maximum) la façon dont vous avez compris le sujet et les objectifs recherchés dans les exercices présentés : acquisition de connaissances, de méthodes, de techniques, évaluation. Vous analyserez la pertinence des différents outils mis en jeu. Cet exposé est suivi d'un entretien (30 minutes maximum).

CAPESA DE MATHÉMATIQUES ÉPREUVE SUR DOSSIER

DOSSIER N° 65

Question : Présenter un choix d'exemples et d'exercices sur le thème suivant :

Exemples de résolutions d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre.

Références aux programmes :

Extraits du programme de BTSA (module D11) :

Acquérir des outils mathématiques nécessaires aux domaines techniques (hydraulique, agroéquipement).	Equations différentielles linéaires à coefficients constants: - équation différentielle d'ordre 2 sans second membre.
--	--

Documentation conseillée :

Ouvrages scolaires de BTS et de BTSA.

Consignes pour l'épreuve :

Pendant votre préparation (deux heures), vous devrez rédiger **sur les fiches mises à votre disposition**, un résumé des commentaires que vous développerez dans votre exposé et **les énoncés** de vos exercices. La qualité de ces fiches interviendra dans l'appréciation de votre épreuve.

L'épreuve dure 55 minutes maximum:

Vous expliquerez dans votre exposé (25 minutes maximum) la façon dont vous avez compris le sujet et les objectifs recherchés dans les exercices présentés : acquisition de connaissances, de méthodes, de techniques, évaluation. Vous analyserez la pertinence des différents outils mis en jeu. Cet exposé est suivi d'un entretien (30 minutes maximum).

Deuxième Épreuve Orale d'Admission (concours externes):

Il semble impératif de rappeler encore que **cette seconde épreuve est difficile**, qu'elle nécessite une préparation minutieuse, et ne saurait se réduire au recopiage de quelques exercices découverts le jour du concours.

- Chaque dossier en rappelle les consignes.

- Au cours de chaque accueil, la Présidence donne des conseils ciblés.

Malgré cela, le jury en constate chaque année un manque de préparation qui s'avère rédhibitoire.

Cette deuxième épreuve se prête tout particulièrement à l'évaluation

- de **l'aptitude du candidat au métier d'enseignant** (gestion du tableau, qualités de communication, autonomie par rapport aux notes... Cf.: p. 41, I. 3°);

- de son adéquation aux aspects spécifiques de l'Enseignement agricole, en probabilité et statistiques (**échantillonnage, estimation, régression...**) notamment.

Commentaires

a) Chaque dossier fournit quelques références aux programmes ainsi qu'une documentation conseillée. **Ces indications ne sont ni exhaustives, ni impératives**; en particulier, les références aux programmes ne constituent **ni la question, ni le plan de l'exposé. Elles sont parfois plus larges (ou plus restrictives) que le sujet proposé.** La consultation des **documents d'accompagnement des programmes** est fructueuse.

b) La partie "exposé" de cette épreuve ne doit consister ni en accumulation de pré-requis, ni en rappels de cours, ni en paraphrase des énoncés proposés, ni en recopiage au tableau des énoncés (que le jury a en mains), ni en résolution systématique des exercices.

c) Le jury n'attend pas nécessairement une réponse immédiate, mais il évalue ici une capacité d'analyse: il s'agit dans cette épreuve, pour le thème proposé, d'analyser son contexte mathématique (quelques pré-requis, insertion dans la progression et les programmes, difficultés liées aux hypothèses, outils utilisés...) et pédagogique (objectifs, **difficultés liées à la compréhension des élèves**, acquisition d'un savoir-faire, difficultés de mise en œuvre, exemples et contre-exemples, cas particuliers...).

d) Cette analyse doit être étayée par la **présentation** d'exercices (le mot "exercice" est à prendre au sens large: il peut s'agir d'activités, de devoirs, de travaux pratiques...): la pertinence de leur choix, les méthodes qu'ils mettent en jeu, leur chronologie, leur progressivité, leur intérêt dans le contexte mathématique et pédagogique, doivent apparaître clairement. En particulier, le **cadre** retenu par le candidat (ou imposé par le sujet) est essentiel: la rédaction et l'ouverture d'un exercice sont différentes lorsqu'il s'agit de T.P., de devoir en temps libre, de devoir en temps limité...

e) L'erreur la plus fréquente commise dans cette épreuve est, cette année, une mauvaise stratégie de choix des sujets: un "refus" de probabilités ou statistiques en première épreuve implique presque automatiquement, dans le profil de ce concours, un passage obligé par ces thèmes en deuxième épreuve.

f) Une autre erreur classique est le **hors sujet**; certains candidats oublient de bien **lire le texte**: chaque dossier rappelle qu'ils doivent expliquer la façon dont ils ont compris le sujet qu'ils traitent et **leur donne en quelques lignes le contenu attendu de leur exposé**. Ce point est essentiel: bien lire l'énoncé et l'appliquer, se référer avec pertinence aux programmes et à leurs documents d'accompagnement, permet d'éviter d'en arriver à un exposé pauvre et mal ciblé, suivi d'exercices hors sujet, choisis hâtivement parce qu'ils sont "intéressants", mais qui n'illustrent pas précisément la situation proposée. Par ailleurs, le candidat doit faire attention aux exercices se résolvant de façon triviale par d'autres méthodes plus simples qui sont alors hors du sujet considéré.

g) Il faut également **prendre du recul** par rapport aux exercices proposés: citer ses sources, savoir garder un regard critique sur les manuels, commenter voire critiquer la façon dont l'énoncé est rédigé, proposer des modifications ou des prolongements, envisager plusieurs méthodes de résolution...

h) Les candidats doivent être conscients qu'à chaque théorème ou résultat énoncé, le jury souhaitera s'assurer de sa bonne compréhension, et, lorsqu'il s'agit de démonstrations figurant dans les programmes, il pourra en demander une justification.

i) Les candidats ne doivent pas oublier le "A" final de CAPESA: en particulier le jury apprécie qu'ils tiennent compte des manuels et des références aux programmes spécifiques (STAE-STPA, BTSA...).

j) Le concours recrute des futurs enseignants ; ils doivent être capable de répondre par eux-mêmes à certaines questions de leurs élèves, et notamment être capables de résoudre des exercices de difficulté et de contenu classique. Le candidat doit s'attendre à ce que le jury lui demande la résolution de tel ou tel des exercices qui ont été proposés. **Résoudre ne peut se limiter à recopier passivement un brouillon**, lui-même copié dans un manuel comportant des rédactions de solutions. Pour prouver qu'il domine convenablement la résolution de l'exercice, le candidat doit garder une **indépendance minimale par rapport à ses notes**.

On rencontre encore trop souvent des candidats ne sachant pas réellement résoudre les exercices qu'ils ont eux-mêmes proposés.

Les méthodes de résolution doivent être adaptées au niveau du lycée ; une connaissance des stratégies relevant d'un niveau supérieur est bienvenue, mais ce n'est pas ce qui est attendu en premier pour cette épreuve

k) Le jury a constaté une amélioration de la présentation (à défaut de l'orthographe) par les candidats des fiches qui leur sont fournies pour qu'ils y notent les commentaires et les énoncés des exercices. Ne pas sous-estimer l'importance d'une belle présentation de ces fiches dont la **qualité entre réglementairement dans l'évaluation de l'épreuve**. Soigner l'orthographe, la syntaxe, vérifier que toutes les données y figurent. Quelques illustrations, ou présentations de figures s'il s'agit de géométrie, ne peuvent qu'aider le jury à prendre connaissance de cette fiche.

COMMENTAIRE DE L'ÉPREUVE ORALE UNIQUE (Concours internes: épreuve professionnelle).

Cette épreuve a été simplifiée dans la forme (deux dossiers sont préparés par le candidat) et dans le fond (entretien à partir d'un des deux dossiers et non d'un sujet posé par le jury).

La préparation et la présentation de seulement deux dossiers ne représentent pas un travail insurmontable: cette nouvelle épreuve tient hautement compte de la charge de travail des candidats pendant une année d'exercice. Les prestations incomplètes, hésitantes, confuses, ou erronées sont donc inacceptables.

Dossiers

Le choix des deux thèmes est fondamental car le candidat doit les maîtriser : connaissances théoriques, place dans les différents programmes de l'Enseignement agricole, anticipation des problèmes induits.

Bien que le dossier n'entre pas dans l'évaluation de l'épreuve orale, une rapide présentation de l'expérience professionnelle du candidat est souhaitable ainsi qu'une bibliographie.

Exposé

Certains candidats n'ont pas assez préparé leurs exposés :

- Respect du temps imparti
- Utilisation du tableau : certains candidats n'utilisent pas du tout le tableau, l'exposé qui en découle est souvent plus confus. Une présentation écrite succincte des principaux aspects de l'exposé (exemple : plan, résultats importants, arguments pédagogiques) est tout à fait souhaitable.
- Comme l'indique clairement la note de service définissant l'épreuve (Cf.: p.11 2°)), il ne faut négliger aucun des aspects de la présentation : "contexte, motivation des choix, démarche, argumentation".

Entretien

Certains candidats n'ont pas une connaissance suffisante de l'ensemble des programmes des classes de l'Enseignement agricole.

1°) Attention à la rigueur dans les domaines suivants:

- Vocabulaire et nature des objets mathématiques (exemples : confusion entre une fonction et sa courbe représentative, différence entre équation et égalité).
- Définition des objets mathématiques (exemple : argument d'un nombre complexe), précision des énoncés des théorèmes (exemple : positivité de

l'intégrale) : il ne faut oublier aucune hypothèse - et connaître l'utilité de chacune d'elles - ni oublier les cas particuliers.

- Nuance entre article défini et article indéfini (exemples : “le module d'un nombre complexe”, “un argument d'un nombre complexe non nul”)
- Différence entre équivalence et implication.

2°) Rappel de la teneur souhaitée de l'entretien:

L'entretien peut porter sur le contenu du dossier, sur le contenu des programmes des classes où le candidat enseigne et sur celui des classes où a vocation à enseigner un professeur certifié. Cet entretien type ne peut être réalisé que si le candidat montre des compétences suffisantes hors de son champ, forcément restreint, d'intervention.

Le niveau scientifique exigé par exemple pour enseigner en **Terminale S (avec enseignement de spécialité) et BTSA**, est une référence. Quelques fondements mathématiques relatifs à l'enseignement en BTSA sont les bienvenus: l'enseignement dans ces classes ne saurait être une accumulation de recettes.