

Session 2008

MAT-08-PG6

Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mardi 29 avril 2008 - de 7h 00 à 10h 00
Deuxième épreuve d'admissibilité

MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures
Coefficient : 3
Note éliminatoire 5/20

Rappel de la notation :

Il est tenu compte, à hauteur de **trois points** maximum, de la qualité orthographique de la production des candidats.

Ce sujet contient 12 pages, numérotées de 1/12 à 12/12. Assurez-vous que cet exemplaire est complet. S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage d'une calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

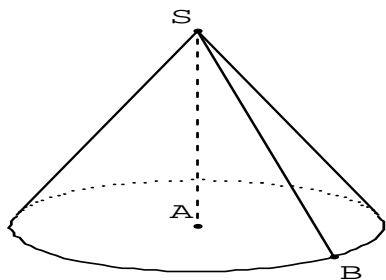
L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez devra, conformément au principe d'anonymat, ne comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.

Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

Exercice 1 (5 points)



Une bougie a la forme d'un cône de révolution de sommet S.

Sa base est un disque de centre A et de rayon 14 cm.

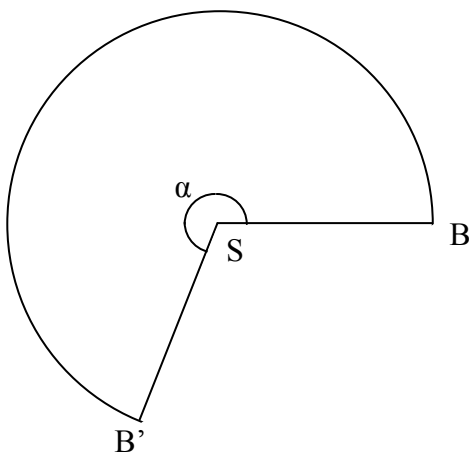
On donne $SB = 21$ cm.

1) On rappelle la formule permettant de calculer le volume V d'un cône :

$$V = \frac{B \times h}{3},$$

où B désigne l'aire de la base du cône et h la hauteur du cône.

- Calculer la valeur exacte de la hauteur de la bougie. En donner une valeur approchée au mm près.
 - Calculer en cm^3 le volume exact de la bougie et en donner une valeur approchée au mm^3 près.
 - Combien de bougies de ce type peut-on fabriquer avec 20 litres de cire ?
- 2) Pour fabriquer ces bougies, on construit un moule en papier qui est un cône de mêmes dimensions que les bougies. La figure ci-dessous représente un patron de ce moule. (La figure n'est pas à l'échelle).



- Calculer la longueur exacte de l'arc de cercle BB' .
 - Calculer l'angle α , en degré.
- 3) En utilisant le même moule en papier, on décide de fabriquer des bougies bicolores rouges et blanches. On procède de la manière suivante :
- on remplit le moule (pointe en bas) de cire blanche jusqu'à mi-hauteur,
 - on complète avec de la cire rouge.
- Quelle est la proportion de cire blanche dans le volume total de la bougie ?

Exercice 2 (3 points)

On se propose de calculer $A = 50\,000\,006 \times 70\,000\,008$

- 1) En tapant ce produit sur une calculatrice scientifique, on peut voir apparaître sur l'écran :

$$3,50000082 \times 10^{15}$$

Justifier, sans calculer A, que cette valeur affichée n'est pas la valeur exacte de A.

- 2) Toujours sans calculer A, démontrer que $35 \times 10^{14} < A < 48 \times 10^{14}$. En déduire le nombre de chiffres de A.
- 3) Le nombre A peut aussi s'écrire $(5 \times 10^7 + 6) \times (7 \times 10^7 + 8)$. En utilisant les produits 5×7 , 5×8 , 6×7 et 6×8 , déterminer la valeur exacte de A.
- 4) Soit $B = 48\,506\,557 \times 505\,149$. Calculer en utilisant une calculatrice : $48\,506 \times 505$; 557×505 ; $48\,506 \times 149$; 557×149 . En déduire, sans nouvelle utilisation de la calculatrice, en écrivant les calculs, la valeur exacte de B.

Exercice 2 – Question complémentaire (4 points)

Cette question complémentaire s'appuie sur des documents extraits du manuel de l'élève et du livre du maître « Euromaths » CE1 (Peltier & al., Hatier, 2004).

Annexe 1 : un extrait du manuel de l'élève correspondant au début de la « leçon 54 », page 88.

Annexe 2 : un extrait du livre du maître correspondant à la « leçon 54 », pages 124 et 125.

Annexe 3 : la feuille de calculs utilisée lors de l'activité préparatoire de la « leçon 54 » (fiche photocopiable page 255).

La « leçon 54 » du manuel de l'élève est située en fin de période 3, la progression du livre étant prévue sur 5 périodes.

Le signe « \times » a été introduit à la fin de la « leçon 53 » pour coder de façon économique des additions répétées.

En amont, deux « leçons » ont été consacrées à l'utilisation de la calculatrice :

- l'une en période 2 / Objectifs annoncés : « Se familiariser avec la calculatrice – Résoudre des problèmes additifs et soustractifs liés à la numération »,
- l'autre en début de période 3 / Objectif annoncé : « Utiliser les acquis de la numération pour répondre à des contraintes de calculs ».

- 1) On s'intéresse au « jeu du Supercalculateur » proposé lors de l'activité préparatoire décrite dans le livre du maître puis dans l'application présentée dans le manuel de l'élève.
- a) Donner les deux procédures mobilisables par les élèves et attendues par le maître dans ce jeu. Pour chacune de ces procédures, indiquer une difficulté et un avantage qu'apporte l'utilisation de la calculatrice.
- b) En quoi le fait d'imposer l'utilisation d'une calculatrice dans la règle du jeu semble pertinent pour atteindre l'objectif : « comprendre l'intérêt de transformer une addition répétée en une multiplication » ?

- 2) On s'intéresse aux deux premiers calculs de l'exercice 1 de la page 88 (en bas de l'Annexe 1). Donner pour chacun une procédure de calcul possible n'utilisant pas la calculatrice et préciser les connaissances qu'elle met en jeu.
- 3) Un peu plus tard dans la « leçon », le maître choisit de proposer l'exercice suivant :
Au CP, il y a 21 élèves. La maîtresse donne 3 cahiers à chaque élève. Combien de cahiers a-t-elle donnés ?
Donner quatre écritures symboliques que le maître peut accepter comme réponses valides. Expliquer comment elles peuvent être obtenues à partir de la situation décrite (vous pourrez présenter vos réponses dans un tableau).

Exercice 3 (4 points)

- 1) Parmi les nombres rationnels suivants, quels sont ceux qui sont décimaux ?
Justifier la réponse.

$$\frac{1}{7} ; \frac{27}{8} ; \frac{91}{7} ; \frac{42}{17}$$

- 2) Le but de cette question est d'étudier l'écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$.

a) Poser la division de 1 par 7. En déduire l'écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$.

b) Donner, en justifiant succinctement, la 32^e décimale du développement périodique de $\frac{1}{7}$.

	A	B
1	42	17
2	8	2
3	12	4
4	1	7
5	10	0
6	15	5
7	14	8
8	4	8
9	6	2
10	9	3
11	5	5
12	16	2
13	7	9
14	2	4
15	3	1
16	13	1
17	11	7
18	8	6
19	12	4
20	1	7
21	10	0
22	15	5
23	14	8

3) Le but de cette question est de produire l'écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$. En utilisant un tableur pour effectuer la division de 42 par 17 on obtient le tableau suivant. A partir de la cellule A2, la colonne A donne les restes successifs de la division de 42 par 17. A partir de la cellule B2, la colonne B donne les quotients successifs.

a) Donner sans justification la 20^e décimale de l'écriture décimale de $\frac{42}{17}$?

b) À partir du tableau ci-contre, donner l'écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$.

c) Expliquer pourquoi on est sûr de retrouver dans la cellule A18 un reste déjà obtenu.

4) On se propose maintenant de retrouver l'écriture fractionnaire du rationnel $a = 1,2\overline{3}$ (c'est-à-dire le nombre dont l'écriture décimale périodique est 1,2323232323...). Pour cela, calculer $100a - a$ et en déduire l'écriture de a sous forme fractionnaire.

Exercice 3 – Question complémentaire (4 points)

Cette question s'appuie sur les documents proposés en annexes 4 et 5 (l'annexe 5 est sur deux pages).

Annexe 4 : Les réponses d'un élève à quatre exercices extraits de l'évaluation nationale à l'entrée en 6^{ème} de 2006 (Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance, Ministère de l'éducation nationale).

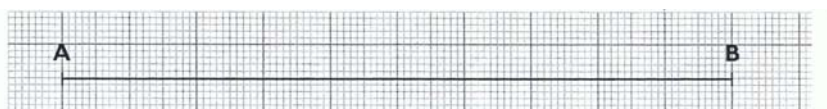
Annexe 5 : Extrait des programmes de mathématiques 2007 – cycle 3.

- 1) Pour chacun des trois exercices 13, 15 et 26 (Annexe 4), identifier de façon précise la capacité qu'il permet d'évaluer.
- 2) Identifier le type d'erreur effectué par cet élève (Annexe 4) en analysant ses réponses. Formuler deux hypothèses sur le mode opératoire utilisé par l'élève dans l'exercice 15.
- 3) Il est fréquent d'utiliser un tableau de numération (exemple ci-dessous) pour aider les élèves à effectuer des exercices tels que les exercices 13, 15 et 26.

100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
centaines	dizaines	unités	dixièmes	centièmes	millièmes

Donner un avantage et un inconvénient liés à l'utilisation d'un tel tableau.

- 4) Un maître de CM2 a proposé l'exercice suivant à ses élèves. Le segment [AB] tracé sur papier millimétré a pour longueur 1dm :



En prenant la longueur du segment [AB] comme unité, trace un segment dont la mesure de la longueur est $\frac{1}{4}$.

Ecris cette mesure sous la forme d'un nombre à virgule.

- a) En s'appuyant sur les programmes de cycle 3, identifier la connaissance relative à cet exercice.
- b) Décrire une procédure qu'un élève de cycle 3 peut mettre en œuvre pour :
 - tracer le segment attendu,
 - écrire sa mesure sous forme décimale.

ANNEXE 1

Extrait du manuel de l'élève « Euromaths » CE1 (Peltier & al., Hatier, 2004).

54

Multiplication (2)

Date :

◆ Activité préparatoire : Jeu du Supercalculateur.

Application

Tu as 5 minutes pour effectuer les calculs suivants.



Règle du jeu du Supercalculateur

Les joueurs doivent calculer le plus vite possible avec une calculatrice sans faire d'erreur. Le gagnant est celui qui fait le plus grand nombre de calculs corrects dans le temps donné.

$12 + 12 + 12 + 12 =$

$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 =$

$23 + 23 + 23 + 23 + 23 + 23 =$

$9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 =$

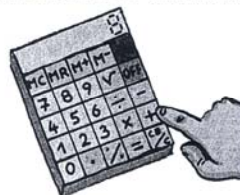
$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$

$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 =$

Combien de calculs corrects as-tu effectués en 5 minutes?



Audrey, José, Nicolas et Thomas ont calculé $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$.



José a tapé $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 =$

Audrey a tapé $8 + 6 =$

Nicolas a tapé $7 \times 8 =$

Thomas a tapé $6 \times 8 =$

Quels enfants ont trouvé la bonne réponse?

Qui a donné le plus rapidement la bonne réponse?

Exercices

1 Trouve, le plus vite possible, avec ou sans ta calculatrice, le bon résultat et colorie-le.

$25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 + 25 =$

200 225 215

$38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 + 38 =$

342 360 380

$147 + 147 + 147 =$

441 521 428

$57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57 + 57 =$

570 507 650

◆ Objectifs • Comprendre l'intérêt de transformer une addition répétée en une multiplication. • Utiliser la calculatrice pour calculer les produits.

◆ Mise en route • Lire l'heure. • Jeu du furet : les enfants comptent de 4 en 4 à partir de 0 en croissant et à partir de 40 en décroissant. Reprendre plusieurs fois, toujours dans le même champ numérique.

88 quatre-vingt-huit

ANNEXE 2

Extrait du livre du maître « Euromaths » CE1 (Peltier & al., Hatier, 2004)

ÉTAPE 54 - PÉRIODE 3

Multiplication (2)

OBJECTIFS

Comprendre l'intérêt de transformer une addition répétée en une multiplication.

Utiliser la calculatrice pour calculer les produits.

DOMAINES DE COMPÉTENCES

Cette nouvelle étape, dans le prolongement de l'étape précédente, a pour objet d'amener les élèves à coder les additions répétées par des produits, en jouant sur la variable « calculer vite », et en les autorisant à utiliser la calculatrice, à ne plus revenir à l'addition pour calculer.

De plus, ils vont rencontrer plusieurs produits par 10, donc commencer à en percevoir l'impact sur le calcul. Nous institutionnaliserons la règle du produit par 10 à l'étape 59.

ORGANISATION DE L'ÉTAPE

2 séances :

- 1^{re} séance : activité préparatoire, application et exercice 1 ;
- 2^e séance : exercices 2 à 7.

MATÉRIEL

Une feuille de calculs (cf. fiche photocopiable page 255).

Une calculatrice par enfant (chacun apporte une calculatrice, le maître complète s'il en manque).

Le fichier de l'élève pages 88 et 89.

Mise en route

Lire l'heure.

Jeu du furet : les enfants comptent de 4 en 4 à partir de 0 en croissant et à partir de 40 en décroissant. Reprendre plusieurs fois, toujours dans le même champ numérique.

Activité préparatoire

PRÉSENTATION DU JEU ET DE LA RÈGLE

Afficher la règle du jeu et distribuer la feuille de calculs (fiche photocopiable page 255). Faire reformuler la règle du supercalculateur. Puis inviter les élèves à commenter la feuille de calcul : ils observent les quatre séries de calculs proposées. Pour chaque calcul, ils constatent que c'est toujours le même nombre qui est répété plusieurs fois. Il y a des nombres avec lesquels ils ont déjà fait ce type de calcul au cours du jeu des carreaux colorés (4, 5 ou 6) mais il y a aussi d'autres nombres.

Le maître précise que c'est lui qui donne le départ et le stop final

pour tout le monde et pour chaque série. Il peut aussi ajouter un enjeu (exemple : on gagne 1 point par calcul correct).

JEU INDIVIDUEL

Durée : 5 minutes par série de calculs.

MISE EN COMMUN

Confronter les résultats et les procédures utilisées :

- certains ont tapé des additions ;
- d'autres ont compté le nombre de termes et ont tapé des multiplications.

Déterminer les points gagnés par chaque enfant. Les élèves qui ont utilisé la multiplication ont très certainement gagné le plus de points au jeu.

Application

LECTURE DE LA 1^{RE} PARTIE

Les élèves observent qu'il s'agit d'une nouvelle partie du jeu du supercalculateur. Le maître donne le signal du départ.

JEU INDIVIDUEL

MISE EN COMMUN

Confronter les résultats et les procédures utilisées :

- certains enfants continuent à taper des additions ;
 - la majorité des enfants comptent le nombre de termes et tapent des multiplications ;
 - certains ont peut-être calculé mentalement le résultat des deux dernières lignes en comptant de 3 en 3 et de 5 en 5.
- Déterminer les points gagnés par chaque enfant. Comparer les scores des élèves au cours des deux jeux du supercalculateur.

Conclure avec les enfants

Pour calculer des sommes de plusieurs nombres tous identiques, il est plus efficace de compter combien de fois le nombre est répété, puis de calculer le produit de ce nombre par le nombre de fois où il est répété, en tapant sur la touche « x » de la calculatrice.

LECTURE DE LA 2^E PARTIE

Les élèves doivent avoir compris que le calcul à effectuer est $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$, et que pour faire ce calcul, José, Audrey, Nicolas et Thomas ne procèdent pas de la même manière. Leur travail consiste à trouver quelles sont les procédures correctes et quelle est la procédure la plus rapide.

TRAVAIL INDIVIDUEL

CORRECTION COLLECTIVE

Conclure avec les enfants

ANNEXE 3

Feuille de calculs utilisée lors de l'activité préparatoire de la « leçon 54 »
(fiche photocopiable page 255, Euromaths CE1, Peltier & al., 2004, Hatier)

— Feuille de calculs **ETAPE 54**

Série 1

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = \dots\dots\dots$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \dots\dots\dots$$

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = \dots\dots\dots$$

$$12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = \dots\dots\dots$$

$$15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = \dots\dots\dots$$

Série 2

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = \dots\dots\dots$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \dots\dots\dots$$

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = \dots\dots\dots$$

$$13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 = \dots\dots\dots$$

$$14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 = \dots\dots\dots$$

Série 3

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = \dots\dots\dots$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \dots\dots\dots$$

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = \dots\dots\dots$$

$$14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 + 14 = \dots\dots\dots$$

$$16 + 16 + 16 + 16 + 16 + 16 = \dots\dots\dots$$

Série 4

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = \dots\dots\dots$$

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = \dots\dots\dots$$

$$6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = \dots\dots\dots$$

$$11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = \dots\dots\dots$$

$$17 + 17 + 17 + 17 + 17 = \dots\dots\dots$$

ANNEXE 4

Exercice 13

Entoure la fraction égale à 80,4.

$$\frac{804}{100}$$

$$\frac{80}{4}$$

$$\frac{84}{10}$$

$$\frac{804}{10}$$

$$\frac{804}{1000}$$

Exercice 15

Parmi les écritures ci-dessous, entoure celle qui est égale à $96 + \frac{2}{100}$.

96,200

962,100

296

96,02

98,100

Exercice 26

Entoure le nombre égal à la fraction $\frac{724}{100}$.

0,724

7,24

72,4

724,100

72 400

Exercice 35

Parmi ces quatre nombres, deux sont égaux. Entoure-les.

0,25

0,4

1,4

$\frac{1}{4}$

ANNEXE 5 (1/2)

Extrait des programmes de mathématiques 2007 – cycle 3

Connaissances et capacités travaillées et attendues en fin de cycle 3	
Connaissances	Capacités
3.1 Fractions - nommer les fractions en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième...	<ul style="list-style-type: none">- utiliser, dans des cas simples, des fractions ou des sommes d'entiers et de fractions pour coder des mesures de longueurs ou d'aires, une unité étant choisie, ou pour construire un segment (ou une surface) de longueur (ou d'aire) donnée ;- encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs ;- <i>écrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.</i>
3.2 Désignations orales et écrites des nombres décimaux - connaître la valeur de chacun des chiffres composant une écriture à virgule, en fonction de sa position.	<ul style="list-style-type: none">- produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10; 100; 1000... et 0,1; 0,01 ; 0,001...;- utiliser les nombres décimaux pour exprimer la mesure de la longueur d'un segment, celle de l'aire d'une surface (une unité étant donnée), ou pour repérer un point sur une droite graduée régulièrement de 1 en 1 ;- associer les désignations orales et l'écriture chiffrée d'un nombre décimal dont la partie décimale ne va pas au-delà du millième ;- produire des suites écrites ou orales de 0,1 en 0,1 ;- <i>produire des suites écrites ou orales de 0,01 en 0,01, de 0,001 en 0,001 ;</i>- écrire et interpréter sous forme décimale une mesure donnée avec plusieurs unités et réciproquement dans des cas simples (par exemple 1 m et 10 cm ; 1,5 kg) ;- savoir passer, dans des cas simples, pour un nombre décimal, d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire (fractions décimales) et réciproquement.
3.3 Ordre sur les nombres décimaux	<ul style="list-style-type: none">- comparer deux nombres décimaux donnés par leurs écritures à virgule, lorsque leurs parties décimales sont de même longueur ;- <i>comparer deux nombres décimaux donnés par leurs écritures à virgule lorsque leurs parties décimales sont de longueurs différentes ;</i>- encadrer un nombre décimal par deux entiers consécutifs ;- <i>encadrer un nombre décimal par deux nombres décimaux ;</i>- intercaler des nombres décimaux entre deux nombres entiers consécutifs ;- <i>intercaler des nombres décimaux entre deux nombres décimaux ;</i>- utiliser les signes < et > pour exprimer le résultat de la comparaison de deux nombres ou d'un encadrement ;- <i>donner une valeur approchée d'un nombre décimal à l'unité près, au dixième ou au centième près ;</i>- situer exactement ou approximativement des nombres décimaux sur une droite graduée de 1 en 1, de 0,1 en 0,1.

ANNEXE 5 (2/2)

<p>3.4 Relations entre certains nombres décimaux</p> <p>- connaître et savoir utiliser dans des situations concrètes (contenance, masse, longueur, monnaie, durée) les écritures fractionnaires et décimales de certains nombres : 0,1 et $\frac{1}{10}$; 0,01 et $\frac{1}{100}$; 0,5 et</p>	<p>- connaître et savoir utiliser dans des situations concrètes les relations entre $\frac{1}{4}$ (ou 0,25) et $\frac{1}{2}$ (ou 0,5), entre $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{10}$;</p> <p>- connaître et savoir utiliser dans des situations concrètes ou non les relations entre $\frac{1}{4}$ (ou 0,25) et $\frac{1}{2}$ (ou 0,5), entre $\frac{1}{100}$</p>
<p>$\frac{1}{2}$; 0,25 et $\frac{1}{4}$, 0,75 et $\frac{3}{4}$.</p> <p>- connaître et savoir utiliser dans des situations concrètes ou non les écritures fractionnaires et décimales des nombres ci-dessus.</p>	<p>et $\frac{1}{10}$; entre $\frac{1}{1000}$ et $\frac{1}{100}$.</p>