Corrigé de l'épreuve 2005 du CAPLP externe

Exercice 1

1.a) **1re méthode :** Soient x et y deux réels vérifiant ($xy > 0$ et $x < y$); en divisant la deuxième inégalité par xy on obtient immédiatement : $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.

2e méthode : remarquons que x et y sont non nuls et de même signe. Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, on a sur chacun de ces deux intervalles l'inégalité souhaitée.
Conclusion l'implication proposée est vraie.

1.b) Montrons que cette affirmation est fausse en donnant un contre-exemple. La fonction valeur absolue est continue sur $[-1;1]$ et pourtant elle n'est pas dérivable en 0. Pour s'en persuader il suffit de constater que sa représentation graphique dans un repère orthonormé possède deux demies tangentes à l'origine qui ne coïncident pas (l'une s'appuie sur la seconde bissectrice alors que l'autre s'appuie sur la première bissectrice).
1.c) Montrons que cette affirmation est vraie. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et paire. Etudions la dérivée en un point a en utilisant le taux d'accroissement $\Delta = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
Puisque f est paire $\Delta = \frac{f(-a-h) - f(-a)}{h} = -\frac{f(-a-h) - f(-a)}{-h}$. Remarquons que ce quotient représente aussi un taux d'accroissement au voisinage de $(-a)$, et que sa limite lorsque h tend vers 0 est égale à $-f'(-a)$ puisque $(-h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. Or $\Delta \xrightarrow[h \to]{} f'(a)$. D'après l'unicité de la limite : $f'(a) = -f'(-a)$; ceci étant vrai pour tout réel a de $\mathbb{R}$, f' est bien une fonction impaire.

2. Démontrons la propriété contraposée : supposons n impair ; il peut s'écrire sous la forme $2k+1$ avec k entier. Et $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ qui est bien un nombre impair. Nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair . Finalement si n^2 est pair alors n est pair.
Nous aurions pu aussi utiliser un théorème d'arithmétique : 2 étant premier s'il divise $n \times n$ il divise l'un des facteurs ; donc il divise n.

3. Cette propriété est vraie pour $n = 1$; supposons qu'elle est vraie pour un entier n supérieur ou égal à 1 : on a alors $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$; soit $1+3+5+...+(2n-1)+(2(n+1)-1)=n^2+(2n+1) = (n+1)^2$ qui est bien le résultat attendu.
La propriété est vraie pour 1 et vraie pour n+1 si elle est vraie pour un n entier quelconque supérieur ou égal à 1, donc la propriété est bien vraie pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 2

1. Remarquons que f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, si (u_n) converge vers 4 alors $f(u_n)$ converge vers $f(4)$ qui est égal à $\frac{15}{4}$. Or les suites (u_n) et (u_{n+1}) ont même limite. Cette contradiction exclut que (u_n) converge vers 4. Les mêmes arguments excluent la réponse d). Puisque la limite de f en $+\infty$ est 4, si (u_n) tendait vers $+\infty$ alors $(f(u_n))$ tendrait vers 4. Là encore nous arrivons à exclure la réponse b).
   Reste la réponse c). Justifions la :

$u_0 = 3$ et $u_1 = \frac{11}{3}$ donc $0 < u_0 < u_1$; f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc si $0 < u_n < u_{n+1}$ alors $0 < u_{+1} < u_{n+2}$. Par récurrence nous venons de montrer que pour tout entier naturel n que $0 < u_n < u_{n+1}$ et il en résulte que **la suite (u_n) est croissante**.

2. a appartenant à $[0\ ,\ \pi]$, pour tout x de $[a\ ,\ \pi]$ $\sin x$ est positif. Donc l'aire du domaine (E) est égale à : $\int_a^\pi \sin x dx$; le calcul de cette intégrale donne $1 + \cos a$. Donc pour que l'aire de (E) soit égale à $\frac{1}{2}$ il faut et il suffit que $\cos a = -\frac{1}{2}$; c'est à dire que $a = \frac{2\pi}{3}$ (là encore nous nous servons de $a \in [0\ ,\ \pi]$) La seule réponse exacte est donc la réponse a).

3 Utilisons un tableau pour représenter les cas possibles en ce qui concerne l'écart entre les deux score:

Score de B Score de A	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

D'après l'énoncé les 36 cases sont équiprobables ; or il y en a 24 qui donnent un écart égal à 0, 1ou 2. Donc **la probabilité recherchée est égale à $\frac{2}{3}$.**

4 La somme des coefficients dans $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \|$ est nulle donc ce nombre est indépendant du point M (cela peut se démontrer en utilisant la relation de Chasles):

On a en fait : $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{CI} \|$;

et $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} \| = 2\| \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} \| = 4\| \overrightarrow{MJ} \|$, où J est le milieu de [IC].

Donc la condition caractérisant les points de (E) revient à : $MJ = \frac{1}{2}\left\| \overrightarrow{IC} \right\|$.

L'ensemble (E) cherché est donc un cercle de centre J. C'est la réponse d) qui est exacte.

Exercice 3

PARTIE A

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$. Donc $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
2. Pour transformer I_{n+2} utilisons une l'intégration par partie définie par : $U = \cos^{n+1} t$ et $V' = \cos t$. Il vient : $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \times \cos t dt = \left[\cos^{n+1} t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^n t \sin t \times \sin t dt$

$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t(1 - \cos^2 t) dt = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. Ce qui donne bien : $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$.

3. Utilisons la relation trouvée au 2. pour montrer que $u_n = u_{n+1}$:
$u_n = (n+1)I_{n+1}I_n = (n+1)I_nI_{n+1} = (n+2)I_{n+2}I_{n+1} = u_{n+1}$. Donc la suite (u_n) est bien constante.

4. D'après ce qui précède $u_n = u_0 = 1\times I_1 \times I_0 = \dfrac{\pi}{2}$. C'est bien la valeur attendue.

5. Remarquons que pour t compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, d'une part $\cos^n t$ reste strictement positif sauf pour $t=\dfrac{\pi}{2}$, et d'autre part $\cos^n t \geq \cos^{n+1} t$; d'où : $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\,dt$ (on utilise aussi que $0<\dfrac{\pi}{2}$). Donc **la suite de terme général I_n est strictement positive et décroissante.**

6. D'après le 2.: $\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{I_{n+2}}{I_n}$; et d'après le 5, : $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leq \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$. C'est bien la double inégalité attendue. Nous pouvons appliquer le théorème « des gendarmes », pour conclure que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

7. $nI_n^{\,2} = n(I_n \times I_n) = (n+1)(I_nI_{n+1}) \times \dfrac{n}{n+1} \times \dfrac{I_n}{I_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$. I_n restant positif :
$\sqrt{n}I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Partie B

1. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{x+1}$. Nous en déduisons le tableau de variation :

x	-1		0		$+\infty$
f'(x)	||	−	0	+	
f(x)	|| $+\infty$	↘	0	↗	

Qui nous prouve que $f(x)$ reste positive sur $]-1\ ,\ +\infty[$; donc sur cet intervalle : $\ln(1+x) \leq x$.

2. Nous pouvons appliquer le résultat précédent à $x=\dfrac{u}{n}$, si nous supposons que u > − n, il en résulte que : $\ln(1+\dfrac{u}{n}) \leq \dfrac{u}{n}$; multiplions chaque membre par n, et prenons l'image par exp des deux membres (ces deux opérations ne changeant pas l'ordre); nous en déduisons que : $(1+\dfrac{u}{n})^n \leq e^u$
Enfin, si u = − n, l'inégalité est encore valable

3. Soit $n\geq 1$ et $t\in\left[0\ ,\ \sqrt{n}\right]$; appliquons le 2. à $u=-t^2$. Nous obtenons $(1-\dfrac{t^2}{n})^n \leq e^{-t^2}$.
Recommençons en appliquant le 2 à $u=t^2$. Nous obtenons : $(1+\dfrac{t^2}{n})^n \leq e^{t^2}$ et la deuxième inégalité est démontrée par « passage aux inverses »..

4. a) Minoration de J_n : la première inégalité démontrée au 3. nous donne $J_n \geq \int_0^{\sqrt{n}} (1-\dfrac{t^2}{n})^n dt$; transformons cette dernière intégrale en utilisant le changement de variable indiqué :
$\int_0^{\sqrt{n}} (1-\dfrac{t^2}{n})^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^n \sqrt{n}\cos t\,dt = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\,dt = \sqrt{n}I_{2n+1}$. D'où : $J_n \geq \sqrt{n}I_{2n+1}$

b) Majoration de J_n : la deuxième inégalité démontrée au 3 nous donne : $J_n \leq \int_0^{\sqrt{n}} (1+\frac{t^2}{n})^{-n} dt$;

transformons cette dernière intégrale en utilisant le changement de variable indiquée :

$$\int_0^{\sqrt{n}} (1+\frac{t^2}{n})^{-n} dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 t)^{-n} \times \sqrt{n} \times (1+\tan^2 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 t)^{-n+1} \times \sqrt{n} dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} t dt$$

.

D'où : $J_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$.

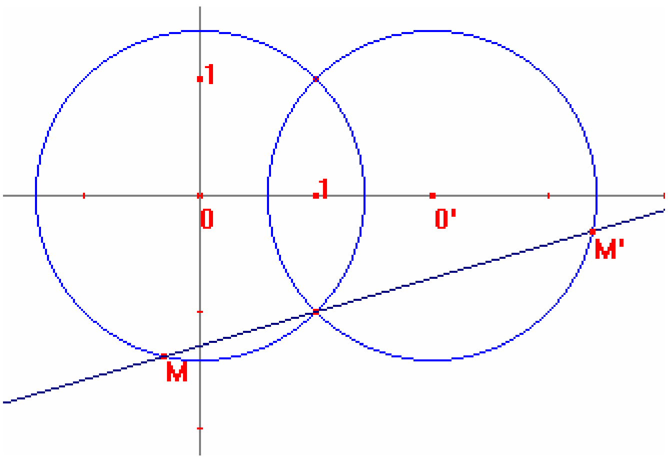
5. (On peut remarquer que J est une intégrale convergente ; en effet : $0 < e^{-t^2} \leq e^{-t}$ pour $t \geq 0$, et $\int_0^X e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^X = 1 - e^{-X}$ qui a une limite finie quand X tend vers $+\infty$; ainsi on peut appliquer un théorème concluant à la convergence de l'intégrale généralisée J.

Et $J = \lim\limits_{X \to +\infty} \int_0^X e^{-t^2} dt = \lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = \lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.)

Mais, plus simplement, on a ici : $\sqrt{n} I_{n+1} \leq J_n \leq \sqrt{n} I_{2n-2}$; le résultat donnant $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ comme limite de $\sqrt{n} In$ combiné avec le théorème des « gendarmes » nous permet de conclure que (J_n) converge vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. D'où : $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

<u>Problème</u>

Partie A



Nous noterons ω l'affixe de Ω. Ici $\omega = 1 + i$.

1. Notons que l'abscisse de Ω est 1 ; donc il est sur la médiatrice de $[OO']$ et il est équidistant de O et O'. Nous aurions pu aussi montrer par le calcul dans $\mathbb{C}$ que : $|1+i| = |2-(1+i)|$.
2. Soit θ l'angle de cette rotation, et ; $\theta = (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega O'}) = \arg(\frac{0-(1+i)}{2-(1+i)}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$. Donc **l'angle de la rotation est $\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$.**
3. La figure étant symétrique par rapport à l'axe des abscisses, $\omega' = \overline{\omega} = 1 - i$.
4. $z' - (1+i) = e^{i\frac{\pi}{2}}([z-(1+i)]$ est la traduction dans $\mathbb{C}$ de : M' est l'image de M dans la rotation dont le centre est d'affixe $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. La résolution de cette équation nous donne : $z' = iz + 2$.

5. a) $|z'-2|=|iz+2-2|=|iz|=|z|=\sqrt{2}$ car M est sur $\mathscr{C}$, cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$. Donc **M' est bien sur le cercle $\mathscr{C}$ '.**

b) Pour montrer que $M\ M'$ et Ω' sont alignés calculons $\Delta=\arg(\frac{z'-\omega'}{z-\omega'})$;

$$\Delta=\frac{(iz+2)-(1-i)}{z-(1-i)}=\frac{(iz+1+i)(\overline{z-1+i})}{|z-1+i|^2}=\frac{(iz+1+i)(\bar{z}-1-i)}{|z-1+i|^2}=\frac{iz\bar{z}+i(\bar{z}-z)+z+\bar{z}-2i}{|z-1+i|^2}.$$

Mais $z\bar{z}=2$, $\bar{z}-z$ est imaginaire pur, et $\bar{z}+z$ est réel ; donc Δ est réel.
Ce qui prouve que $M\ M'$ et Ω **sont alignés.**

PARTIE B

1. Utilisons la même relation qu'au A 4. : $\tilde{r}(z)-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ Mais nous savons que $r(O)=O'$; d'où : $a'-\omega=e^{i\theta}(0-\omega)$; d'où : $e^{i\theta}=1-\frac{a'}{\omega}$, et : $\tilde{r}(z)=z'=(1-\frac{a'}{\omega})z+a'$.
2. Si Ω est situé sur l'axe des réels, étant équidistant de O et O' qui sont situés aussi sur cet axe, Ω est milieu de [OO']. Et la rotation est alors une symétrie centrale de centre Ω.
3. a) Ces deux cercles étant de même rayon mais pas de même centre, s'il sont tangents c'est au milieu de [OO']. Et nous nous retrouvons dans le cas de la question précédente.

   b) Si ces deux cercles sont sécants c'est en deux points non situés sur l'axe des réels ; ce sera le cas si et seulement si Ω n'est pas sur cet axe.
4. a) $z_{\overline{\Omega'M}}=z-\omega'=z-\bar{\omega}$

   b) $z_{\overline{\Omega'M'}}=z'-\bar{\omega}=(1-\frac{a'}{\omega})z+a'-\bar{\omega}$.

   c) cas $M\neq\Omega'$:

   c1) La rotation de centre Ω envoyant O en O' envoie le cercle $\mathscr{C}$ centré en O sur un cercle centré en O' et de même rayon ; c'est donc le cercle $\mathscr{C}$ '. M étant sur $\mathscr{C}$ M' est sur $\mathscr{C}$ '.

   c2) Les points M et Ω sont sur un même cercle de centre O donc : $z\bar{z}=OM^2=O\Omega^2=\omega\bar{\omega}$.
   Les points M' et Ω sont sur un même cercle de centre O', donc :
   $$(z'-a')(\overline{z'-a'})=O'M'^2=O'\Omega^2=O\Omega^2=\omega\bar{\omega}.$$

   c3) $$\frac{z_{\overline{\Omega'M'}}}{z_{\overline{\Omega M}}}=\frac{(1-\frac{a'}{\omega})z+a'-\bar{\omega}}{z-\bar{\omega}}=\frac{z-\bar{\omega}+a'(1-\frac{z}{\omega})}{z-\bar{\omega}}=1+\frac{a'(\omega-z)}{\omega(z-\bar{\omega})}=1+\frac{a'(\omega-z)\bar{\omega}(\bar{z}-\omega)}{|...|^2}.$$

   Pour prouver que ce nombre est réel nous allons étudier $(\omega-z)\bar{\omega}(\bar{z}-\omega)$ (on utilise ici que a' est réel).

   En développant il vient : $(\omega-z)\bar{\omega}(\bar{z}-\omega)=\omega\bar{\omega}(z+\bar{z})-z\bar{z}\bar{\omega}-\omega^2\bar{\omega}$. Or $\omega\bar{\omega}(z+\bar{z})$ est réel ; et $z\bar{z}=\omega\bar{\omega}$. Il nous reste donc à prouver que : $-\omega\bar{\omega}^2-\omega^2\bar{\omega}$ est réel ; ce qui est clair puisqu'il s'agit de la somme de deux nombres conjugués. **Donc $\frac{z_{\overline{\Omega'M'}}}{z_{\overline{\Omega M}}}$ est bien réel.**

   c4) La conclusion précédente nous assure que $M\ M'$ et Ω' **sont bien alignés.**

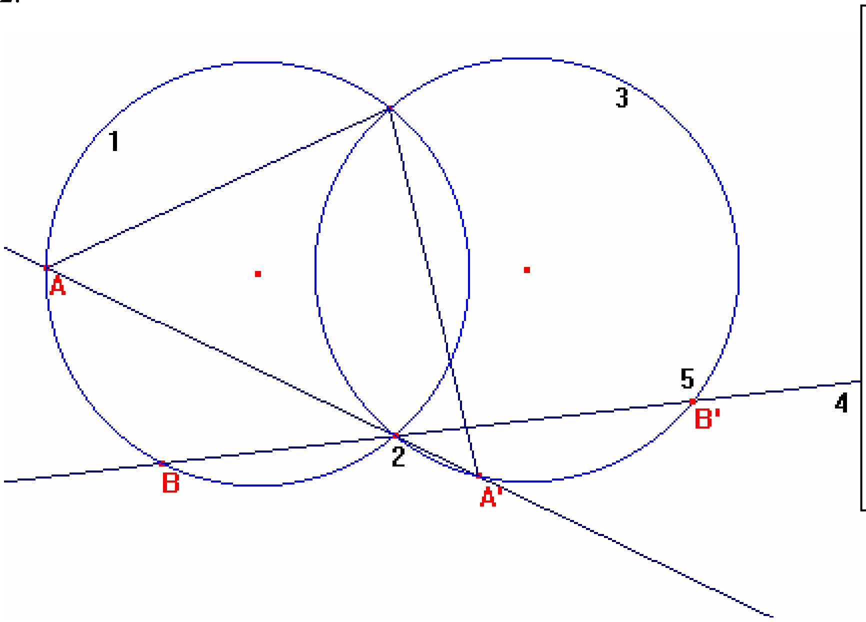
   d) cas $M=\Omega'$:
   Etudions l'angle entre les droites (MM') et (OΩ'):

$z'-z=(1-\frac{a'}{\omega})\overline{\omega}+a'-\overline{\omega}=a'(-\frac{\overline{\omega}}{\omega}+1)=\frac{\overline{\omega}a'(\omega-\overline{\omega})}{|\omega|^2}$. Remarquons que $\frac{a'(\omega-\overline{\omega})}{|\omega|^2}$ est un imaginaire pur ; par suite $\frac{z'-z}{\overline{\omega}-0}$ est imaginaire pur, et l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{O\Omega}$ est droit. Ce qui nous assure que **la droite (MM') est tangente au cercle $\mathscr{C}$ en Ω'.**

Remarque : dans cette question, il aurait convenu d'exclure le cas où les cercles sont tangents car alors la droite (MM') n'est pas définie (et le complexe considéré ci-dessus est nul et n'a pas d'argument)

PARTIE C

1. Dans cette partie, on suppose que Δ recoupe $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$ ´en M et M' ; donc on suppose que $M \neq \Omega'$ et que $M' \neq \Omega'$.
 Soit r la rotation de centre Ω qui transforme O en O' (et donc $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$'), et soit $r(M)$ l'image de M par r. $r(M)$ appartient à $\mathscr{C}'$'.
 D'après la partie B, $r(M)$, M, et Ω' sont alignés. Donc, comme $r(M)$ appartient à $\mathscr{C}'$', $r(M)=M'$ ou $r(M)=\Omega'$.
 Si $r(M)=\Omega'$, alors $r^{-1}(\Omega')=M$, et d'après la partie B.4.d) appliquée à r^{-1}, $(\Omega' M)$ est tangente à $\mathscr{C}'$', ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que Δ recoupe $\mathscr{C}'$'.
 Donc $r(M)=M'$.
2.



On construit successivement :

1 : le cercle $\mathscr{C}$ circonscrit à ΩAB

2 : l'intersection Ω' entre $\mathscr{C}$ et (AA') autre que A

3* : le cercle circonscrit $\mathscr{C}$ ' à $\Omega A'\Omega'$

4 : l'intersection B' entre $\mathscr{C}$ ' et $(B\Omega')$ autre que Ω'.

* : Ce cercle $\mathscr{C}$' a le même rayon que $\mathscr{C}$. En effet considérons la rotation r de centre Ω qui transforme A en A'. Elle transforme $\mathscr{C}$ en un cercle $r(\mathscr{C})$, de même rayon et passant par A et Ω.
D'après la partie B, la droite (AA') passe par le deuxième point d'intersection des cercles, noté Ω' : donc $r(\mathscr{C})$ est le cercle circonscrit à Ω, Ω', et A' ; c'est-à-dire que $r(\mathscr{C})=\mathscr{C}$ '. Ce qui prouve que $\mathscr{C}$ 'a le même rayon que $\mathscr{C}$.
Autre méthode : le cercle C de centre A passant par Ω et le cercle C' de centre A' passant par Ω.
B est sur le segment [MN] avec M et N sur C . Donc B' est sur [M'N'] construits sur C'.
On place B' en rajoutant ΩB' = ΩB.