ÉLÉMENTS DE CORRIGÉ

Exercice 1

1. Vrai. Soient x_1 et x_2 deux éléments de I. Si $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$ car f est décroissante sur I, et $g(f(x_1)) \leq g(f(x_2))$ car $f(x_1)$ et $f(x_2)$ appartiennent à f(I) et g est décroissante sur f(I). Donc $g \circ f$ est croissante sur I.
2. Faux. On peut considérer $x = \sqrt{2}$ et $n = 2$.
3. Faux. Par exemple la fonction définie par $f(x) = \sin(3x)$ est une solution non identiquement nulle de cette équation et vérifie la condition initiale.
4. Vrai. Une démonstration par récurrence permet de justifier cette affirmation : pour $n = 0$ on a bien $0^3 = (0)^2$; si l'égalité est vraie pour n alors on a
$$\left(\sum_{k=0}^{n+1} k\right)^2 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \sum_{k=0}^{n+1} k^3$$; l'égalité étant vraie pour

$n = 0$ et vraie pour n+1 si elle est vraie pour un n entier positif fixé, alors elle est vraie pour tout n dans **N**.

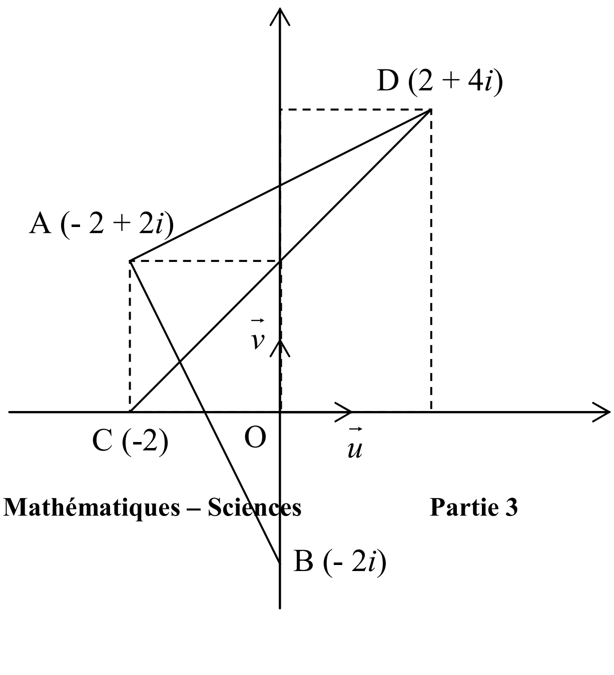
5. Vrai. Supposons par exemple, sans perte de généralité, que f est croissante, et notons T une période de f. Soient deux réels x_1 et x_2 . Si $x_1 \leq x_2$, il existe n tel que $x_1 + nT > x_2$: on a alors $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_1 + nT) = f(x_1)$. Et donc $f(x_1) = f(x_2)$. Si $x_1 \geq x_2$ le même raisonnement s'applique.
6. Faux. Contre exemple : la suite (u_n) définie sur **N*** par $u_n = 2 - \frac{1}{n}$.
7. Faux : la famille n'est plus libre. Il suffit de prendre $v = u_1$.
8. C'est une conséquence de l'écriture analytique du produit scalaire. Soient d : $y = ax + b$ et d' : $y = a'x + b'$ deux droites non parallèles aux axes. On sait que $\vec{u}(1, a)$ et $\vec{u}'(1, a')$ sont respectivement des vecteurs directeurs de d et d'. $\vec{u} \perp \vec{u}' \Leftrightarrow$
$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \Leftrightarrow 1 + aa' = 0 \Leftrightarrow aa' = -1$.

Exercice 2

Partie I

Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -2 + 2i$; $b = -2i$; $c = -2$; $d = 2 + 4i$.

1. Figure :



2. $Z_1=\dfrac{b-a}{d-a}=\dfrac{-4i+2}{4+2i}=\dfrac{-2i+1}{2+i}=\dfrac{-5i}{5}=-i$, donc $Z_1=\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$ et

$Z_2=\dfrac{b-c}{d-c}=\dfrac{-2i+2}{4+4i}=\dfrac{1-i}{2+2i}=...=-\dfrac{1}{2}i$ donc $Z_2=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

3. Des résultats sur les formes trigonométriques, on déduit que le triangle BAD est rectangle isocèle en A, et que le triangle BCD est rectangle en C.
4. Un triangle rectangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'hypoténuse. Or les deux triangles rectangles *ACD* et *BCD* ont même hypoténuse [BD], ils sont donc inscrits dans le même cercle de centre le milieu de [BD] et de rayon $\dfrac{BD}{2}=\sqrt{10}$.

Partie II

1. Le nombre [*A*, *B*, *C, D*] est réel si et seulement si $\dfrac{c-a}{c-b}\div\dfrac{d-a}{d-b}$ est nul ou si $\arg\left(\dfrac{c-a}{c-b}\div\dfrac{d-a}{d-b}\right)=0[\pi]$.

Or $\dfrac{c-a}{c-b}\div\dfrac{d-a}{d-b}=0 \Leftrightarrow c=a$, ce qui est impossible car les points *A*, *B*, *C* et *D* sont deux à deux distincts ; et :

$$\arg\left(\frac{c-a}{c-b}\div\frac{d-a}{d-b}\right)=0[\pi]\Leftrightarrow \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)-\arg\left(\frac{d-a}{d-b}\right)=0[\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AD}\right)[\pi]$$

Ce qui traduit la cocyclicité ou l'alignement des quatre points.

2.

$$\begin{aligned}[A,\ B,\ C,\ D]=-1 &\Leftrightarrow \frac{c-a}{c-b}\div\frac{d-a}{d-b}=-1\\ &\Leftrightarrow (c-a)\times(d-b)=-(c-b)\times(d-a)\\ &\Leftrightarrow cd-cb-ad+ab=-cd+ca+bd-ba\\ &\Leftrightarrow 2(cd+ab)=ac+ad+bc+bd\\ &\Leftrightarrow 2(cd+ab)=(a+b)\times(c+d)\end{aligned}$$

d'où la première équivalence.

$$\begin{aligned}\left(c-\frac{a+b}{2}\right)\times\left(d-\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 &\Leftrightarrow cd-(c+d)\times\left(\frac{a+b}{2}\right)+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}\\ &\Leftrightarrow 4cd-2(c+d)\times(a+b)+a^2+2ab+b^2=a^2-2ab+b^2\\ &\Leftrightarrow 2(cd+ab)=(c+d)\times(a+b)\end{aligned}$$

Ainsi (1) est équivalente à (2).

3. Pour les quatre points A, B, C, D de la partie I on a :

$$\left(\frac{c-a}{c-b}\div\frac{d-a}{d-b}\right)=\frac{-2+2-2i}{-2+2i}\times\frac{2+4i+2i}{2+4i+2-2i}=\frac{-i}{-1+i}\times\frac{2+6i}{4+2i}=\frac{2(-i+3)}{2(-3+i)}=-1$$

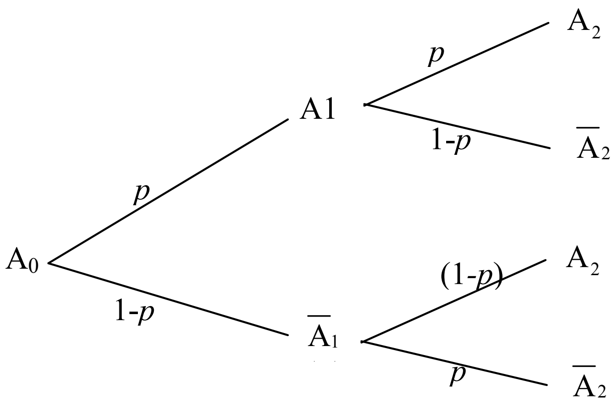
4. On note I le milieu du segment $[AB]$. De la question 2 on déduit que $\dfrac{c-\dfrac{a+b}{2}}{\dfrac{a-b}{2}}=\dfrac{\dfrac{a-b}{2}}{d-\dfrac{a+b}{2}}$.

   Ainsi les arguments de ces deux nombres complexes sont égaux soit : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IC}\right)=\left(\overrightarrow{ID};\overrightarrow{AB}\right)$ d'où la droite (AB) est bissectrice des demi droites $[IC)$ et $[ID)$.
   De la question 2, on déduit également en écrivant l'égalité sur les modules que $IC\times ID=\dfrac{AB^2}{4}$.

Exercice 3

Partie I

1. Etude du cas particulier n =2
   a.



   b. Détermination de p_1 : par définition de A_1 on a $p_1=p$.
   Détermination de p_2. : le message émis par E_0 sera correctement reçu par E_2 si il a été correctement reçu par E_1 puis correctement reçu par E_2, ou bien si il a été incorrectement reçu par E_1 puis incorrectement reçu par E_2. Ce qui donne $p\left(A_2\right)=p_{A_1}\left(A_2\right)\times p\left(A_1\right)+p_{\overline{A_1}}\left(A_2\right)\times p\left(\overline{A_1}\right)$ et en remplaçant par les valeurs de l'arbre pondéré, on trouve $p_2=2p^2-2p+1$.
2. Etude du cas général :
   Comme précédemment, le message émis par E_0 est correctement reçu par E_{k+1} si il a été correctement reçu par E_k puis correctement reçu par E_{k+1}, ou bien si il a été incorrectement reçu par E_k puis incorrectement reçu par E_{k+1}. ce qui donne
   $p\left(A_{k+1}\right)=p_{A_k}\left(A_{k+1}\right)\times p\left(A_k\right)+p_{\overline{A_k}}\left(A_{k+1}\right)\times p\left(\overline{A_k}\right)$.
   On en déduit alors $p_{k+1}=(2p-1)p_k+1-p$.
3. Expression de p_n en fonction de n.
   a. Etude d'une suite auxiliaire :

i. Nature de la suite $(u_k)_{k\in N}$

Afin de déterminer la nature de cette suite on essaye d'exprimer u_{k+1} en fonction de u_k

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= p_{k+1} - \frac{1}{2} \\ &= (2p-1)p_k + 1 - p - \frac{1}{2} \\ &= (2p-1)\times\left(p_k - \frac{1}{2}\right) \\ &= (2p-1)\times u_k \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(u_k)_{k\in N}$ est géométrique de raison $(2p-1)$ et de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$.(remarque : si $p = \frac{1}{2}$, la suite est nulle à partir du deuxième rang).

ii. Des résultats précédents on en déduit que $u_n = \frac{1}{2}\times(2p-1)^n$ et donc

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times(2p-1)^n$$

b. Le nombre *p* est strictement compris entre 0 et 1 donc la raison de la suite est strictement comprise entre -1 et 1 et ainsi, en appliquant les résultats sur les limites des suites géométriques, il vient que la suite (p_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

c. En conclusion :

- La probabilité d'obtenir un message correct en fin de parcours est indépendante de la valeur de *p.*
- Il y a une chance sur deux pour que le message émis arrive correctement, quelque soit la valeur de p.

<u>Partie II</u>

1. On choisit k récepteurs parmi les n qui sont à l'écoute : c'est un schéma de Bernoulli , la probabilité que *k* récepteurs soient à l'écoute est : $\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.

2.

a. L'événement ($Y = 0$) est l'événement « aucun récepteur ne reçoit la valeur émise par E_0. » (qu'ils ne soient pas à l'écoute ou qu'ils ne reçoivent pas la bonne valeur).

b. : $P((Y=0)\cap B_n) = p_{B_n}((Y=0))\times p(B_n) = \binom{n}{0} p^0(1-p)^n \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}(1-p)^n\lambda^n}{n!}$

c. Les (B_n) forment un système complet d'événements. On a donc

$(Y=0) = \bigcup_{n=0}^{+\infty}[(Y=0)\cap B_n]$,

$$P\big((Y=0)\big)=\sum_{n=0}^{+\infty} p\big((Y=0)\cap B_n\big)$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}(1-p)^n\lambda^n}{n!}$$

et : $$=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\big((1-p)\lambda\big)^n}{n!}$$

$$=e^{-\lambda}\times e^{(1-p)\lambda}$$

$$=e^{-\lambda p}$$

d. Appliquons le même raisonnement pour déterminer $P(Y=k)$.

$$P((Y=k)\cap B_n)=p_{B_n}((Y=k))\times p\big(B_n\big)$$

$$=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

puis comme $(Y=k)=\bigcup_{n=0}^{+\infty}\big[(Y=k)\cap B_n\big]$ on en déduit

$$P\big((Y=k)\big)=\sum_{n=k}^{+\infty} p\big((Y=k)\cap B_n\big)$$

$$=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{k!\times(n-k)!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\times(1-p)^n$$

$$=\frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(1-p)^n\lambda^n}{(n-k)!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-p)^{n+k}\lambda^{n+k}}{n!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda}}{k!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^k(1-p)^k\lambda^k\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1-p)^n\lambda^n}{n!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda p}\times\big(\lambda p\big)^k}{k!}$$

On peut alors en déduire que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.
On en déduit que E(Y) = λp et que V(Y) = λp.

Exercice 4

1. $\boxed{b_0 = 1}$; $b_0 + 2b_1 = 0 \Rightarrow \boxed{b_1 = -\frac{1}{2}}$; $b_0 + 3b_1 + 3b_2 = 0 \Rightarrow 3b_2 = -1 + \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{b_2 = \frac{1}{6}}$;

   $b_0 + 4b_1 + 6b_2 + 4b_3 = 0 \Rightarrow 4b_3 = -1 + 2 - 1 \Rightarrow \boxed{b_3 = 0}$;

   $b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3 + 5b_4 = 0 \Rightarrow 5b_4 = -1 + \frac{5}{2} - \frac{10}{6} \Rightarrow \boxed{b_4 = -\frac{1}{30}}$

2. $B_1(X) = \binom{1}{0} b_0 X + \binom{1}{1} b_1 = \boxed{X - \frac{1}{2}}$; $B_2(X) = \binom{2}{0} b_0 X^2 + \binom{2}{1} b_1 X + \binom{2}{2} b_2 = \boxed{X^2 - X + \frac{1}{6}}$

   $B_3(X) = \binom{3}{0} b_0 X^3 + \binom{3}{1} b_1 X^2 + \binom{3}{2} b_2 X + \binom{3}{3} b_3 = \boxed{X^3 - \frac{3}{2} X^2 + \frac{1}{2} X}$.

3. Pour tout entier *n* supérieur ou égal à 2 : $B_n(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k 0^{n-k} = b_n$ et $B_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k = b_n$

   car $\forall n \geq 2, \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k = 0$.

4. Pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1, on a : $B_n'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} b_k (n-k) X^{n-k-1}$ or, pour tout entier *k* entre 0 et $n - 1$,

$$\begin{aligned}(n-k) \times \binom{n}{k} &= (n-k) \times \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \\ &= \frac{n \times (n-1)!}{k! \times (n-k-1)!} \\ &= n \times \binom{n-1}{k}\end{aligned}$$

   D'où $B'_n(X) = nB_{n-1}(X)$

5. Pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^1 B_n(t)dt &= \frac{1}{n+1} \int_0^1 B_{n+1}'(t)dt \\ &= \frac{1}{n+1} \left[B_{n+1}(t) \right]_0^1 \\ &= 0 \text{ car } n+1 \geq 2\end{aligned}$$

6. Établissons par récurrence que pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1 :
   $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$
   Initialisation :
   pour $n = 1$ on a $B_1(X+1) - B_1(X) = X + 1 - \frac{1}{2} - X + \frac{1}{2} = 1$ et $1X^{1-1} = 1$, la récurrence est bien fondée.
   Passage au rang supérieur :
   Supposons qu'il existe un entier *n* non nul tel que $B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$ alors considérons la fonction définie par : $f(x) = B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x)$, on notera de même le

polynôme et la fonction polynôme. Cette fonction est dérivable et :

$$\begin{aligned} f'(x) &= B'_{n+1}(x+1) - B'_{n+1}(x) \\ &= (n+1)\times\left(B_n(x+1) - B_n(x)\right) \\ &= (n+1)\times n \times x^{n-1} \end{aligned}$$

Donc $f(x) = (n+1)x^n + k$

et comme $f(0) = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0$, on en déduit que $k = 0$ et que

$f(x) = B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n$. Ce qui achève la démonstration par récurrence.

7.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} k^n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{k=m}\left(B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0)\right)\cdot \end{aligned}$$

D'où pour $n = 2$ on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} k^2 &= \frac{1}{3}\left(B_3(m+1) - B_3(0)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left((m+1)^3 - \frac{3}{2}(m+1)^2 + \frac{1}{2}(m+1)\right) - 0 \\ &= \frac{m\times(m+1)\times(2m+1)}{6} \end{aligned}$$

8.

a. Pour démontrer que la suite (A_n) est confondue avec la suite (B_n), il suffit de prouver les trois résultats suivants :
$A_0(X) = 1$ et pour tout entier naturel n supérieur à 1, $A'_n(X) = nA_{n-1}(X)$ et $\int_0^1 A_n(t)dt = 0$.
D'après la définition des polynômes (A_n) on peut écrire :

$$\begin{aligned} A'_n(X) &= (-1)^{n+1}B'_n(1-X) \\ &= (-1)^{n+1}nB_{n-1}(1-X) \\ &= nA_{n-1}(X) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^1 A_n(t)dt &= (-1)^n\int_0^1 B_n(1-t)dt \\ &= (-1)^{n+1}\int_1^0 B_n(t)dt \\ &= (-1)^n\int_0^1 B_n(t)dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

• $A_0(X) = 1$

b. Du résultat précédent on peut en déduire que
$b_{2p+1} = A_{2p+1}(0) = (-1)^{2p+1}B_{2p+1}(1) = -b_{2p+1}$ d'où : $b_{2p+1} = 0$.

9. Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Soit f une fonction de classe C^{2p+1} sur [0 ; 1]. On désigne, pour tout entier naturel non nul n, par $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre (n) de f et on pose par convention $f^{(0)} = f$.

a. Montrons que pour tout entier n de l'intervalle $[2; 2p+1]$, on a :

$$\int_0^1 f^{(n)}(t)\times B_n(t)dt = b_n \times \left(f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)\right) - n\times\int_0^1 f^{(n-1)}(t)\times B_{n-1}(t)dt$$

Les fonctions $f^{(n-1)}$ et B_n sont de classe C^1 sur [0 ; 1], on peut donc envisager une intégration par parties ce qui donne :

$$\int_0^1 f^{(n)}(t)\times B_n(t)dt = \left[f^{(n-1)}(t)\times B_n(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f^{(n-1)}(t)\times B_n'(t)dt$$

$$= b_n \times \left(f^{(n-1)}(1) - f^{(n-1)}(0)\right) - n\times\int_0^1 f^{(n-1)}(t)\times B_{n-1}(t)dt$$

b. En appliquant deux fois le résultat ci-dessus et le fait que $b_{2p+1} = 0$, on obtient :

$$\frac{1}{(2k+1)!}\int_0^1 f^{(2k+1)}(t)B_{2k+1}(t)dt = -\frac{b_{2k}}{(2k)!}\left(f^{2k-1}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + \frac{1}{(2k-1)!}\int_0^1 f^{(2k-1)}(t)B_{2k-1}(t)dt\cdot$$

c. Première formule d'Euler- Mac Laurin

En sommant le résultat ci-dessus pour k variant de 1 à p, on obtient :

$$\frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2p+1)}(t)B_{2p+1}(t)dt = -\sum_{k=1}^{k=p} b_{2k}\frac{f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)}{(2k)!} + \int_0^1 f'(t)B_1(t)dt$$

De plus

$$\int_0^1 f'(t)B_1(t)dt = \int_0^1 f'(t)\left(t - \frac{1}{2}\right)dt$$

$$= \left[f(t)\left(t-\frac{1}{2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(1) + f(0)\right) - \int_0^1 f(t)dt$$

d'où

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\frac{f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)}{(2k)!} - \frac{1}{(2p+1)!}\int_0^1 f^{(2p+1)}(t)B_{2p+1}(t)dt\cdot$$