SESSION DE 2008

CA/PLP

CONCOURS EXTERNE ET CAFEP
TROISIÈME CONCOURS

Section : MATHÉMATIQUES-SCIENCES PHYSIQUES

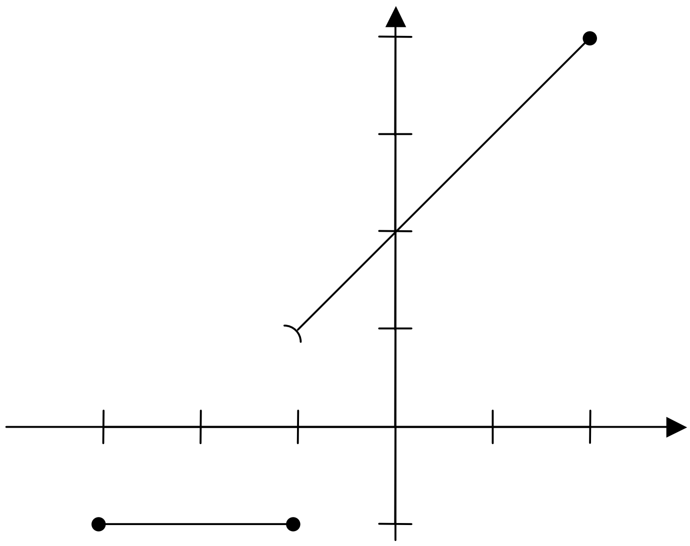
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Éléments de correction

Éléments de correction de l'exercice 1

Proposition 1 :

La proposition est fausse : il suffit pour s'en convaincre de considérer la fonction f définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$ par $f(x) = -1$ si $x \in [-3;-1]$ et $f(x) = x+2$ si $x \in]-1;2]$ et dont la représentation graphique est la suivante :



On a bien $f(-3) = -1, f(2) = 4$, f définie et croissante sur l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$ et pourtant il est clair que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans l'intervalle $[-3\ ;\ 2]$.

Proposition 2 :

La proposition est vraie : en effet, on a :

$$f(x)-1=\frac{5x+3}{4x+4}-1=\frac{x-1}{4x+4},$$

et puisque, pour $x\geq 1$, on a $x-1\geq 0$ et $4x+4>0$, alors on a bien pour $x\geq 1$, $f(x)-1\geq 0$ soit $f(x)\geq 1$.

Proposition 3 :

La proposition est vraie. En effet, pour tout nombre réel *a*, si *x* est un nombre réel strictement supérieur à *a*, puisque *f* est croissante sur **R**, alors $f(x)\geq f(a)$ et de ce fait, le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est un nombre positif en tant que quotient de nombres positifs.

Puisque *f* est dérivable en *a*, on sait que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a pour limite le nombre $f'(a)$ lorsque *x* tend vers *a*. Par passage à la limite dans l'inégalité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$, on obtient donc que $f'(a)\geq 0$ et ceci pour tout réel *a* ce qui assure la fonction dérivée *f'* est positive ou nulle sur **R**.

Proposition 4 :

La proposition est fausse. En effet, si on note *d* la longueur, exprimée en kilomètres, du trajet parcouru par le cycliste entre les villes A et B, si on note t_1 et t_2 les temps, exprimés en heure, mis par le cycliste pour aller respectivement de la ville A à la ville B puis de la ville B à la ville A, on a les relations :

$$20=\frac{d}{t_1} \text{ et } 30=\frac{d}{t_2} \text{ soit } t_1=\frac{d}{20} \text{ et } t_2=\frac{d}{30}.$$

On en déduit donc que la vitesse moyenne sur le trajet aller-retour est

$$v=\frac{2d}{t_1+t_2}=\frac{2d}{\frac{d}{20}+\frac{d}{30}}=\frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}}=\frac{2}{\frac{3+2}{60}}=\frac{120}{5}=24\neq 25.$$

Proposition 5 :

La proposition est vraie. En effet, si B est un point fixe de *f*, c'est-à-dire si *f* (B) = B, alors puisque *f* est une isométrie, on sait que la distance $f(\mathrm{A})f(\mathrm{B})$ égale la distance AB soit $\mathrm{A'B}=\mathrm{AB}$, ainsi B est à égale distance de A et de A', ie B appartient à la médiatrice du segment [AA'].

Éléments de correction de l'exercice 2

1.

a. Étant dans une situation d'équiprobabilité, nous savons que :
$P(X) = 0{,}15$, $P(Y) = 0{,}55$, $P(Z) = 0{,}3$, $P_X(D) = 0{,}05$, $P_Y(D) = 0{,}03$ et $P_Z(D) = 0{,}02$.
La probabilité cherchée est $P(X \quad D)$ et comme $P(X) \neq 0$, on a :
$P(X \quad D) = P_X(D)\ P(X) = 0{,}05 \times 0{,}15 = 0{,}0075$.

b. Les événements X, Y et Z formant une partition de l'univers de tous les tirages possibles, on a donc :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \quad (X \quad Y \quad Z)) = P((D \quad X) \quad (D \quad Y) \quad (D \quad Z)) \\ &= P(D \quad X) + P(D \quad Y) + P(D \quad Z) \\ &= P_X(D)\ P(X) + P_Y(D)\ P(Y) + P_Z(D)\ P(Z) \\ &= 0{,}05 \times 0{,}15 + 0{,}03 \times 0{,}55 + 0{,}02 \times 0{,}3 = 0{,}03. \end{aligned}$$

c. Les événements X et D sont indépendants si et seulement si on a

$$P(X \quad D) = P(X) \times P(D).$$

Or, $P(X \quad D) = 0{,}0075$ et $P(X) \times P(D) = 0{,}15 \times 0{,}03 = 0{,}0045$.
Ainsi, les deux événements « le composant est de type X » et « le composant est défectueux » ne sont pas indépendants.

d. Nous cherchons $P_D(Z)$ qui vaut :

$$P_D(Z) = \frac{P(D \cap Z)}{P(D)} = \frac{P_Z(D) \times P(Z)}{P(D)} = \frac{0{,}02 \times 0{,}30}{0{,}03} = 0{,}2.$$

Donc, sachant que le composant prélevé est défectueux, la probabilité qu'il soit de type Z vaut 0,2.

2.

a. En procédant comme dans la question précédente, on obtient que $P_D(X) = 0{,}25$ et que $P_D(Y) = 0{,}55$, ce qui signifie que dans la population des composants défectueux, 25% sont de type X, 55% sont de type Y et 20% sont de type Z.
Si on note S_D la variable aléatoire « surcoût » définie sur la population des composants défectueux, son espérance vaut alors

$$E(\ S_D\ ) = 2 \times 0{,}25 + 3 \times 0{,}55 + 5 \times 0{,}20 = 3{,}15.$$

Ainsi le surcoût moyen de remplacement d'un composant défectueux est de 3,15 €.

b. Puisque dans la population des composants, défectueux ou non, la proportion de composants défectueux est de 3%, puisqu'un composant non défectueux n'occasionne pas de surcoût alors qu'un composant défectueux en occasionne un de 3,15 €, alors le surcoût moyen occasionné par la présence de composants défectueux vaut

$$0 \times 0,97 + 3,15 \times 0,03 = 0,0945.$$

Ainsi, si on répercute ce coût sur l'ensemble des composants (défectueux ou non), le surcoût moyen occasionné par la présence de composants défectueux dans le stock s'élève à environ 0,09 €.

3.

a. L'événement « les quatre composants prélevés sont d'un même type » admet une partition en les événements suivants :

T_X : « les quatre composants sont de type X »,
T_Y : « les quatre composants sont de type Y »,
T_Z : « les quatre composants sont de type Z ».

On cherche donc $P(T_X) + P(T_Y) + P(T_Z)$. Or, par indépendance des tirages (puisqu'on peut assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre composants), on a :

$$P(T_X) = P(X)^4,\ P(T_Y) = P(Y)^4,\ P(T_Z) = P(Z)^4.$$

On en déduit alors que $P(T_X) + P(T_Y) + P(T_Z) = 0,1001125$. Ainsi, la probabilité que les quatre composants prélevés soient d'un même type est de 0,1 à 0,001 près.

b. Puisqu'on peut assimiler le prélèvement à un tirage avec remise de quatre composants, les tirages successifs sont donc indépendants. Chaque tirage d'un composants est donc une épreuve de Bernoulli à deux issues D et $\overline{D}$ avec P(D) = p et $P(\overline{D}) = 1\text{-}p$. La variable aléatoire N suit donc la loi binômiale $\mathcal{B}(4,1\text{-}p)$ et donc pour k entier entre 0 et 4, on a

$$P(N=k) = \binom{4}{k}(1-p)^k p^{4-k}.$$

On en déduit que

$$P(N \geq 3) = P(N=3) + P(N=4) = 4(1-p)^3 p + (1-p)^4$$

On obtient ainsi qu'à 0,001 près la probabilité qu'au moins trois des quatre composants prélevés ne soient pas défectueux vaut 0,995.

Éléments de correction de l'exercice 3

1.

a. On obtient aisément que $z_{A'} = 4 + 4\,i$, $z_{B'} = 2\,i$, $z_{C'} = -1+\frac{3}{2}i$.

b. Voir en fin d'exercice.

c. On constate que $z_{B'} - z_{C'} = 1+\frac{1}{2}i$ et que $z_{A'} - z_{C'} = 5+\frac{5}{2}i$; on en déduit donc que $\overrightarrow{C'A'} = 5\ \overrightarrow{C'B'}$. Les points *A', B', C'* sont donc alignés.

2.

a. Puisque $\overrightarrow{\Omega h(M)} = 5\ \overrightarrow{\Omega M}$, on a $z_1 - z_\Omega = 5(z - z_\Omega)$ d'où $z_1 = 5z + 2i$.

b. On sait que l'application h^{-1} est l'homothétie de centre et de rapport $\frac{1}{5}$ et on en déduit donc que $z_2 = \frac{z-2i}{5} = \frac{1}{5}z - \frac{2}{5}i$.

c. On obtient aisément que $z_{A_2} = \frac{4}{5}+\frac{2}{5}i$, $z_{B_2} = 0, z_{C_2} = -\frac{1}{5}-\frac{1}{10}i$. La figure complétée se trouve en fin d'exercice.

d. Une homothétie transforme une droite en une droite lui étant parallèle. Or, le vecteur $\overrightarrow{C'B'}$ d'affixe $1+\frac{1}{2}i$ dirige la droite D' et donc aussi la droite D_2, tout comme le vecteur $\vec{w} = 2\ \overrightarrow{C'B'}$ d'affixe 2 + i.
De plus $B' \in D'$ donc $O = h^{-1}(B') \in h^{-1}(D') = D_2$. Ainsi, D_2 est la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{w}$ d'affixe 2 + i.

3.

a. Il suffit de combiner le fait que $z_3 = \frac{z'-2i}{5}$ et que $z' = \frac{5}{2}z + \left(\frac{3}{2}+2i\right)\bar{z} + 2i$ pour obtenir que $z_3 = \frac{1}{2}z + \left(\frac{3}{10}+\frac{2}{5}i\right)\bar{z}$.

b. Les points invariants par l'application *p* sont les points M tels que *p*(M) = M ; ce sont donc les points d'affixe *z* tels que $z = \frac{1}{2}z + \left(\frac{3}{10}+\frac{2}{5}i\right)\bar{z}$ soit encore ceux tels que $z = \left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\bar{z}$. Si on pose $z = x + i\,y$ avec x et y réels, on obtient, en considérant partie réelles et parties imaginaires, que l'équation précédente est alors équivalente à la **seule** équation $x = 2\,y$ qui n'est autre que l'équation de la droite passant par O dirigée par le vecteur d'affixe 2+i ; il s'agit donc bien de la droite D_2.

c. On a

$$\frac{z_3}{2+\mathrm{i}}=\frac{z_3(2-\mathrm{i})}{5}=\frac{1}{5}(2-i)\left(\frac{z}{2}+\left(\frac{3}{10}+\frac{2\mathrm{i}}{5}\right)\overline{z}\right)$$

qui donne après développement

$$\frac{z_3}{2+\mathrm{i}}=\frac{1}{5}\left(z+\overline{z}-\frac{\mathrm{i}}{2}(z-\overline{z})\right)=\frac{1}{5}\left(2\,\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)\right)$$

Par conséquent, le nombre $\frac{z_3}{2+\mathrm{i}}$ est un nombre réel.

On obtient de même que $\frac{z-z_3}{2+\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{5}\left(2\,\mathrm{Im}(z)-\mathrm{Re}(z)\right)$ et ainsi le nombre $\frac{z-z_3}{2+\mathrm{i}}$ est un nombre imaginaire pur.

d. De $\frac{z_3}{2+\mathrm{i}}$ réel, on déduit que $z_3=\lambda(2+\mathrm{i})$ avec λ réel , soit $\overrightarrow{OM_3}=\lambda\overline{w}$. On en déduit que M_3 appartient à la droite D_2.

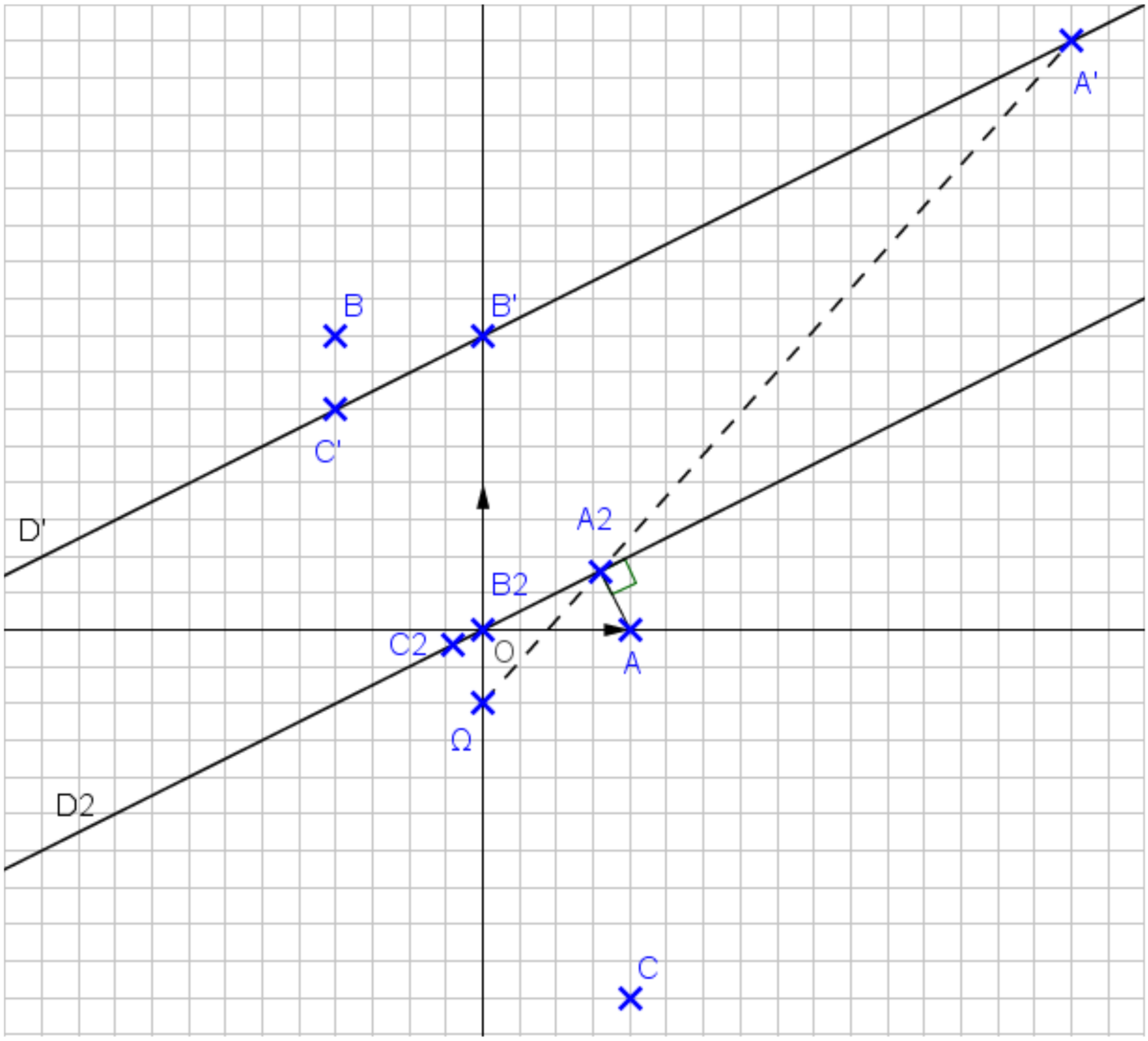
$\frac{z-z_3}{2+\mathrm{i}}$ imaginaire pur équivaut à $\left(z=z_3\ ou \begin{cases} z\neq z_3 \\ \arg\left(\frac{z-z_3}{2+\mathrm{i}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\end{cases}\right)$ soit encore à

$\left(M=M_3\ ou \begin{cases} M\neq M_3 \\ \widehat{\left(\overrightarrow{w},\overline{M_3M}\right)}\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]\end{cases}\right)$ ce qui équivaut au fait que le vecteur $\overline{MM_3}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{w}$ dirigeant la droite D_2.

Pour tout point M du plan, il existe un seul point vérifiant ces deux conditions, à savoir le projeté orthogonal de M sur la droite D_2.

Par conséquent, p est la projection orthogonale sur la droite D_2.

De $p=h^{-1}\circ f$, on tire $f=h\circ p$. L'application f est donc la composée de la projection orthogonale sur la droite D_2 suivie de l'homothétie de centre Ω et de rapport 5.



Éléments de correction de l'exercice 4

Partie A : étude de deux suites couplées

1. Pour tout entier naturel n, on a

$$d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} - \frac{v_n + 2u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{1}{3} d_n,$$

ce qui assure que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et que, pour tout entier naturel n, $d_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n d_0 = \frac{1}{3^{n-1}}$ d'où l'on tire que $d_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2. On obtient aisément que $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}d_n$ et que $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{3}d_n$ et comme $d_n = \frac{1}{3^{n-1}} > 0$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et leur différence tend vers 0 en l'infini donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes.
4. On pose, pour tout entier naturel *n*, $s_n = u_n + v_n$.
   a. On a $s_{n+1} = s_n$ pour tout entier naturel n et donc la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est constante et de plus, $\forall n \in N, s_n = s_0 = u_0 + v_0 = 7$.
   b. En sommant et soustrayant les deux relations $v_n - u_n = d_n = \frac{1}{3^{n-1}}$ et $u_n + v_n = s_n = 7$, on obtient que $u_n = \frac{1}{2}\left(7 - \frac{1}{3^{n-1}}\right)$ et que $v_n = \frac{1}{2}\left(7 + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$.
   c. Il est clair que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent toutes les deux vers $\frac{7}{2}$.

Partie B : démonstration d'un résultat concernant les suites adjacentes

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante minorée. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$, définie par $v_n = -u_n$ en tout entier naturel n, est croissante majorée car

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = u_n - u_{n+1} \geq 0 \text{ et } u_n \geq M \Leftrightarrow v_n \leq -M .$$

   Ainsi, on sait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel A. On en déduit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers le réel –A. Ainsi, toute suite réelle décroissante minorée converge.
2.
   a. Pour tout entier naturel n, on a

$$d_{n+1} - d_n = b_{n+1} - a_{n+1} - (b_n - a_n) = (b_{n+1} - b_n) - (a_{n+1} - a_n) \leq 0$$

   puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est supposée croissante et donc $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de ce fait décroissante donc $b_{n+1} - b_n \leq 0$. Ainsi, la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
   b. Puisque la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et tend vers 0, elle est nécessairement positive ou nulle, ce qui signifie que, pour tout entier naturel *n*, $a_n \leq b_n$.
   c. Puisque la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante, on a, pour tout entier naturel n, $b_n \leq b_0$ et donc en tenant compte de la question précédente, on a, pour tout entier naturel n, $a_n \leq b_n \leq b_0$ ce qui assure que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée par le nombre réel b_0.

d. La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante majorée donc elle converge. De plus, on a, pour tout entier naturel n, $b_n = a_n + d_n$ et donc la suite $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge en tant que somme de deux suites convergentes.

e. Si on note α la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la relation $b_n = a_n + d_n$ assure alors, par passage à la limite quand n tend vers l'infini, que $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha + 0 = \alpha$. Ainsi, les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent vers une même limite et on a donc ainsi prouvé que deux suites adjacentes convergent vers une même limite.

Partie C : suites adjacentes et dichotomie

1. On obtient que

$$(u_1,v_1)=(7,13),(u_2,v_2)=(10,13),(u_3,v_3)=(10,11.5),(u_4,v_4)=(10.75,11.5)$$

2.

a. Si $\frac{u_n+v_n}{2}$ ne majore pas **K**, alors $v_{n+1}-u_{n+1}=v_n-\frac{u_n+v_n}{2}=\frac{v_n-u_n}{2}$.

Si $\frac{u_n+v_n}{2}$ majore **K**, alors $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}$. Par conséquent, la suite $(v_n-u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Son premier terme valant $v_0-u_0=M-k\geq 0$ puisque M majore **K** et que $k\in K$, on a, pour tout entier naturel n, $v_n-u_n=\frac{M-k}{2^n}\geq 0$ ce qui assure que pour tout entier naturel n on a $u_n\leq v_n$.

b. Suivant les cas, $u_{n+1}-u_n$ vaut 0 ou $\frac{v_n-u_n}{2}$ qui comme on vient de le voir est positif ou nul. Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1}-u_n\geq 0$ et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. On obtient de même que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

De plus $v_n-u_n=\frac{M-k}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont adjacentes et on sait alors qu'elles convergent vers un même réel que l'on notera *s*.

c. On prouve par récurrence sur l'entier naturel n que, pour tout entier naturel *n*, v_n est un majorant de **K.**

On a donc $\forall x\in K,\forall n\in N, x\leq v_n$**.** Puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} s$, le passage à la limite dans l'inégalité précédente aboutit à $\forall x\in K, x\leq s$ ce qui signifie que *s* majore **K**.

d. Prouvons par récurrence sur n qu'il existe toujours un élément de K, que nous noterons x_n supérieur ou égal à u_n :

- Au rang n=0, il suffit de prendre $x_0 = k = u_0$ qui appartient bien à **K** par hypothèse dans l'énoncé.
- Si, pour un entier naturel n donné, il existe un réel x_n qui est dans **K** et qui est supérieur ou égal à u_n, alors deux cas de figure peuvent se présenter :
    - Si $\frac{u_n + v_n}{2}$ ne majore pas **K,** cela signifie qu'il y a un élément dans **K** qui est plus grand que $\frac{u_n + v_n}{2}$. Or, dans ce cas de figure, on a $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$ et donc on est bien sûr qu'il existe un élément de **K** supérieur ou égal à u_{n+1}.
    - Si $\frac{u_n + v_n}{2}$ majore **K,** dans ce cas puisqu'on a $u_{n+1} = u_n$ alors, x_n est un élément de **K** qui est supérieur ou égal à u_n et donc à u_{n+1}.

On est donc sûr que pour tout entier naturel n il existe x_n qui est dans **K** et qui est supérieur ou égal à u_n. Comme de plus, on a obtenu dans la question précédente que v_n est un majorant de **K**, on a donc

$$\forall n \in N, u_n \leq x_n \leq v_n$$

Or, les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent toutes deux vers le réel *s* et donc, par encadrement, la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers *s*. Ainsi, il existe bien une suite d'éléments de **K** convergeant vers *s*.

e. Soit *s'* un majorant de **K**. Puisque $x_n \in K$, alors, on a $\forall n \in N, x_n \leq s'$. Comme la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers *s* on en déduit par passage à la limite que $s' \geq s$.

f. Puisque *s* majore **K** et que tout majorant de **K** est supérieur ou égal à *s*, *s* est le plus petit des majorants de **K** à savoir *s* est la borne supérieure de **K**. Comme cette borne supérieure ne dépend ni du choix d'un élément *k* de **K** ni du choix d'un majorant *M* de **K**, cela signifie bien que la limite *s* des suites convergentes $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne dépend pas des choix initiaux de *k* et de *M* pourvu que *k* appartienne à **K** et que *M* majore **K**.