CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS
DE LYCEE PROFESSIONNEL AGRICOLE - 2ème grade (PLPA2)

SESSION 2003

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques – Sciences physiques

EPREUVE ECRITE D'ADMISSIBILITE N°1

MATHEMATIQUES

(Coefficient : 2 - Durée : 4 heures)

Matériel autorisé **: calculatrice**

Rappel : Au cours de l'épreuve, la calculatrice est autorisée pour réaliser des opérations de calculs, ou bien élaborer une programmation, à partir des données fournies par le sujet. Tout autre usage est interdit.

SUJET :

L'épreuve est constituée de deux problèmes.

Le premier traite d'une application géométrique F, définie avec l'aide des nombres complexes : construction géométrique de l'image d'un point, étude d'images et d'images réciproques d'ensembles de points.

Le deuxième, d'analyse, est composé de deux parties :
la première a pour objet l'étude d'intégrales généralisées ;
la deuxième est consacrée à l'étude de la convergence d'une série.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des instruments de calcul est autorisée, notamment celle des calculatrices de poche à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

PREMIER PROBLEME

On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Pour tous points M et N, la distance de M et N, notée MN, est telle que $MN = \left\|\overrightarrow{MN}\right\|$.

Le point de coordonnées (x,y) est caractérisé par son affixe, le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$.

Soit f l'application de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes dans $\mathbb{C}$ qui, à tout nombre complexe z, associe le nombre complexe z' tel que $z' = 0$ si $z = 0$ et $z' = Re(z) \times \frac{z}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$;

[$Re(z)$ désigne la partie réelle de z].

On note F l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

1- Soit z un nombre complexe.

Vérifier que $|z'| = |Re(z)|$.

2- *a*. Déterminer l'image par l'application F de l'axe $(O;\vec{v})$ des ordonnées.

L'application F est-elle une bijection de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{P}$?

b. Déterminer l'ensemble des points invariants par l'application F.

c. Démontrer que la restriction de F à l'axe $(O;\vec{u})$ des abscisses est une bijection de cet axe sur lui-même.

3- Soit M un point n'appartenant ni à l'axe des abscisses, ni à l'axe des ordonnées.

On désigne par H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.

a. Démontrer que $OM' = OH$ et $MM' = MH$.

b. Proposer une construction géométrique à la règle non graduée et au compas du point M' à partir du point M. (Illustrer cette construction avec le point M d'affixe $2+3\mathrm{i}$).

c. Démontrer que M' est symétrique de H par rapport à la droite (OM).

4- *a*. Soit A un point n'appartenant ni à l'axe des abscisses, ni à l'axe des ordonnées.

Déterminer l'image par F de la droite (OA).

b. Déterminer l'image par F de chacune des droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, d'équation respectives $y = x$ et $y = -x$.

c. Déterminer l'image réciproque par F de l'axe $(O;\vec{v})$ des ordonnées. [C'est-à-dire l'ensemble des points M du plan dont l'image par F appartient à $(O;\vec{v})$].

DEUXIÈME PROBLÈME

PARTIE I

Etude d'intégrales généralisées.

1- Pour tout nombre réel α strictement supérieur à -1, on désigne par f_α la fonction définie sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$.

a. Soit α un nombre réel strictement supérieur à -1.

Etudier la limite en 0, la limite en $+\infty$ et le sens de variation de la fonction f_α.

b. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions $f_{-0,5}$, $f_{0,5}$, f_1 et f_2 dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité : 5 cm).

(Justifier les tracés pour les abscisses au voisinage de 0).

2- *a.* Soit α un nombre réel strictement supérieur à -1.

En distinguant les deux cas $\alpha \geq 0$ et $-1 < \alpha < 0$, démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul, l'intégrale $\int_0^x t^\alpha e^{-t}\,dt$ existe.

b. Démontrer qu'il existe un nombre réel x_0 tel que, pour tout nombre réel t supérieur ou égal à x_0, $t^\alpha e^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}$.

c. Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,dt$ est convergente.

3- Pour tout nombre réel α strictement supérieur à -1, on pose $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,dt$.

a. Démontrer que, pour tout nombre réel α strictement supérieur à -1, $\Gamma(\alpha+1) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha)$.

Pour tout nombre entier naturel n, déterminer $\Gamma(n)$.

b. Démontrer que, pour tout nombre réel α strictement supérieur à -1, $\int_0^1 t^\alpha e^{-t}\,dt \geq \dfrac{1}{e(\alpha+1)}$.

c. Étudier les limites de $\Gamma(\alpha)$, lorsque α tend vers -1, puis lorsque α tend vers $+\infty$.

PARTIE II

Etude de la convergence d'une série.

Pour tout nombre entier naturel n, on désigne par F_n la fonction définie pour tout nombre réel x positif ou nul par $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\,dt$.

Soit x un nombre réel strictement positif.

1- *a.* Calculer $F_0(x)$ et $F_1(x)$.

b. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, $\dfrac{1}{n!}F_n(x) = 1 - e^{-x}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$.

2- *a.* Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, $\dfrac{1}{n!}F_n(x) \leq \dfrac{x^n}{n!}$.

b. Soit (v_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par $v_n = \dfrac{x^n}{n!}$.

À l'aide de l'égalité $v_{n+1} = \dfrac{x}{n+1}v_n$, démontrer que la suite (v_n) est convergente et a pour limite 0.

3- Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$ est convergente et déterminer sa somme.