CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS
DE LYCEE PROFESSIONNEL AGRICOLE (PLPA)

SESSION 2005

Concours : **EXTERNE**
Section : **Mathématiques – Sciences physiques**

EPREUVE N° 1

Composition de Mathématiques

(Coefficient : 2 - Durée : 4 heures)

L'usage des instruments de calcul est autorisé, notamment celui des calculatrices de poche à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'ils ne soit pas fait usage d'imprimante.

L'épreuve est constituée de deux problèmes.

Le premier traite d'une famille d'applications géométriques en utilisant des nombres complexes : étude d'images d'ensembles de points, construction géométrique de l'image d'un point.

Le deuxième d'analyse a pour objet l'étude de la convergence d'une suite (I_n) d'intégrales. Elle débouche sur l'étude de la série numérique de terme général I_n.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies ainsi que, dans la question concernée, le savoir-faire pédagogique et l'intervention de méthodes en conformité avec les programmes en vigueur dans les lycées professionnels agricoles.

PREMIER PROBLÈME

On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$, rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Le point de coordonnées (x,y) est caractérisé par son affixe, le nombre complexe $z = x + iy$.

On note $\bar{z}$ le nombre conjugué de z : $\bar{z} = x - iy$.

PARTIE I

1.

a. Étant donné un nombre complexe non nul $w = a + ib$, a et b réels, et un nombre réel l, démontrer que l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\overline{wz} + w\bar{z} = l$ est une droite. Exprimer l'affixe d'un vecteur normal à cette droite en fonction de w.

b. Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $ax + by + c = 0$ où a, b, c, sont des nombres réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$.

Déterminer un nombre complexe non nul w et un nombre réel l tel que la droite $\mathscr{D}$ soit l'ensemble des points du plan $\mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie $w\bar{z} + \overline{wz} = l$.

2.

a. Étant donné un nombre complexe w et un nombre réel k, déterminer l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie : $z\bar{z} - \overline{wz} - w\bar{z} + k = 0$.

b. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre le point de coordonnées (a,b) et de rayon r.

Déterminer un nombre complexe w et un nombre réel k tel que le cercle $\mathscr{C}$ soit l'ensemble des points M du plan $\mathscr{P}$ dont l'affixe z vérifie : $z\bar{z} - \overline{wz} - w\bar{z} + k = 0$.

PARTIE II

Soit Ω un point quelconque du plan $\mathscr{P}$. On considère l'application $\mathscr{I}_\Omega$ de $\mathscr{P}$-$\{\Omega\}$ dans $\mathscr{P}$-$\{\Omega\}$, qui à tout point M associe le point M' vérifiant simultanément les deux conditions :

- $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M'}$ colinéaires et de même sens.
- $\Omega M \times \Omega M' = 1$.

1.

a. Démontrer que l'application $\mathscr{I}_\Omega$ est involutive.

b. Déterminer l'ensemble des points invariants par l'application $\mathscr{I}_\Omega$.

c. Construction de l'image d'un point par l'application $\mathscr{I}_\Omega$.

Γ désigne le cercle de centre Ω de rayon 1. M est un point quelconque tel que $\Omega M > 1$.

Soit (MT), l'une des deux tangentes au cercle Γ issues de M, T désignant le point de contact de cette tangente avec le cercle Γ.

Si M' désigne le projeté orthogonal du point T sur la droite (ΩM), démontrer que $\Omega T^2 = \Omega M \times \Omega M'$, puis que le point M' est l'image du point M par l'application $\mathscr{I}_\Omega$.

En déduire une construction à la règle non graduée et au compas de l'image M' d'un point quelconque M distinct de Ω. On envisagera les deux cas : $\Omega M > 1$ et $\Omega M < 1$.

2. Soit $\mathcal{I}_O$, l'application définie comme précédemment lorsque $\Omega = O$.

   M désigne un point quelconque du plan distinct de O d'affixe z et M' son image par l'application $\mathcal{I}_O$ d'affixe z'.

   a. Vérifier que $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$

   b. Soit $\mathcal{D}_0$ une droite contenant le point O. Déterminer l'image de $\mathcal{D}_0 - \{O\}$ par l'application $\mathcal{I}_O$.

   c. Soit $\mathcal{D}$ une droite ne contenant pas le point O. Déterminer l'image de $\mathcal{D}$ par l'application $\mathcal{I}_O$.

   d. Soit $\mathcal{C}$ un cercle passant par O. Déterminer l'image de $\mathcal{C} - \{O\}$ par l'application $\mathcal{I}_O$.

3. Soit w un nombre complexe non nul.

   Soit s l'application de l'ensemble $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout nombre complexe z, associe le nombre complexe z' tel que $w\bar{z} + \bar{w}z' = 1$.

   On note S l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z'.

   a. Démontrer que l'application S est involutive.

   b. Démontrer que l'ensemble des points invariants par S est la droite Δ d'équation $w\bar{z} + \bar{w}z = 1$.

   c. Démontrer que le point d'affixe $\dfrac{z+z'}{2}$ est invariant, puis que $\dfrac{z'-z}{w}$ est réel.

   d. Démontrer que l'application S est la symétrie orthogonale par rapport à Δ.

4. M désigne un point quelconque du plan d'affixe z et M' son image par l'application $\mathcal{I}_\Omega$. ω désigne l'affixe de Ω.

   a. Démontrer que l'affixe z' de M' s'exprime en fonction de l'affixe z de M par $z' = \omega + \dfrac{1}{\bar{z} - \bar{\omega}}$.

   b. On suppose que $|\omega| = 1$.

   $\mathcal{I}_O$ désigne l'application définie comme précédemment lorsque $\Omega = O$.

   On considère l'application H de $\mathcal{P}$-$\{O, \Omega\}$ vers $\mathcal{P}$-$\{O, \Omega\}$ définie par $H = \mathcal{I}_O \circ \mathcal{I}_\Omega \circ \mathcal{I}_O$.

   Démontrer que H associe à tout M d'affixe z le point M'' d'affixe z'' tel que: $z'' = \dfrac{1 - \omega\bar{z}}{\bar{\omega}}$.

   En déduire que H est la restriction à $\mathcal{P}$-$\{O, \Omega\}$ d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite Δ_Ω. Caractériser la droite Δ_Ω par rapport aux points O et Ω.

   c. On suppose que $\omega = i$.

   M désigne le point d'affixe 2. Soient M_1, M_2, M_3 les points définis respectivement par : $M_1 = \mathcal{I}_O(M)$, $M_2 = \mathcal{I}_\Omega(M_1)$, $M_3 = \mathcal{I}_O(M_2)$.

   Construire à la règle non graduée et au compas sur un même figure, le point Ω, les cercles de centres respectifs Ω, O et de rayon 1, les points M_1, M_2, M_3 et la droite Δ_Ω. On prendra comme unité graphique 5 centimètres.

DEUXIÈME PROBLÈME

Rappels :

Soient (u_n) et (v_n) des suites de nombres réels telles qu'il existe un nombre entier naturel n_0 tel que, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n \neq 0$ et $v_n \neq 0$.

u_n et v_n sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$ (noté $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$) si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ a pour limite le nombre 1 lorsque n tend vers $+\infty$;

- il existe une suite (d_n), qui a pour limite 0 lorsque n tend vers $+\infty$, telle que $u_n = (1+d_n)v_n$.

On suppose que :

- pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à n_0, $u_n > 0$ et $v_n > 0$;

- la série de terme général u_n converge.

Dans ces conditions, on admet que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors la série de terme général v_n converge et $\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{n=p+1}^{+\infty} v_n$.

On considère la suite d'intégrales (I_n), définie pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx .$$

PARTIE I

Détermination de la limite de la suite (I_n).

1- Vérifier que pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 , l'intégrale I_n est bien convergente.

2- On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $F(x) = \int_1^x \frac{1-t}{1+t^3} dt$.

a. Démontrer que si x est non nul, $F\left(\frac{1}{x}\right) = F(x)$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1-t}{1+t^3} dt$ est nulle.

b. Soit x un nombre réel différent de -1. Vérifier l'égalité : $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1-x}{2(1+x^3)} + \frac{1}{2(x^2-x+1)}$.

Calculer l'intégrale I_1 et vérifier que $I_1 = \frac{2}{9}\pi\sqrt{3}$.

3- Démontrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire que la suite (I_n) converge.

4- Soit ε un nombre réel de l'intervalle $]0;1[$ et n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 1.

Justifier chacune des trois inégalités suivantes :

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq \varepsilon \ , \ \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq \frac{1-\varepsilon}{(1+\varepsilon^3)^n} \ , \ \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq \frac{1}{3n-1} .$$

En déduire la limite de la suite (I_n).

PARTIE II

Étude de la série de terme général (I_n).

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 respectivement par $U_n = \frac{1}{3}\ln n + \ln(I_n)$, et $V_n = U_{n+1} - U_n$.

1-

a. p étant un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 , vérifier que

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}.$$

b. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\frac{1}{n} \leq \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{n-1}$.

c. Démontrer que $\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2-

a. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 1, $I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n$.

(On pourra effectuer une intégration par parties sur I_n).

b. Vérifier que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, $V_n = \frac{1}{3}\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln\left(1 - \frac{1}{3n}\right)$.

c. Justifier l'équivalence $V_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-2}{9n^2}$.

d. En déduire que la série de terme général V_n est convergente et que $\sum_{p=n}^{+\infty} V_p \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{-2}{9p^2}$.

3-

a. Démontrer que la suite (U_n) est convergente. On note U sa limite.

b. Prouver que $U - U_n = \sum_{p=n}^{+\infty} V_p$ et que $U - U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-2}{9n}$.

4-

a. Démontrer qu'il existe une suite (α_n), admettant pour limite 0 lorsque n tend vers $+\infty$, telle que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, $exp(U_n - U) = 1 + \frac{2}{9n} + \frac{1}{n}\alpha_n$.

b. Quelle est la nature de la série de terme général I_n ?