CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS
DE LYCEE PROFESSIONNEL AGRICOLE

SESSION

SESSION 2007

Concours : EXTERNE
Section : Mathématiques - Sciences physiques

EPREUVE N° 1

MATHÉMATIQUES

(Coefficient : 2 - Durée : 4 heures)

L'épreuve est constituée de deux problèmes.

Le premier problème de géométrie est composé de deux parties. Il permet de déterminer une ellipse inscrite dans un triangle quelconque possédant des propriétés remarquables.

Le deuxième problème d'analyse, est composé de trois parties :

- La première a pour objet l'étude de la continuité et la dérivabilité de deux fonctions auxiliaires.
- La deuxième partie débouche sur le calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.
- La dernière partie est consacrée au calcul de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ à l'aide d'une suite d'intégrales.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'utilisation des instruments de calcul est autorisée, notamment celle des calculatrices de poche à condition qu'elles soient à fonctionnement autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante.

PREMIER PROBLÈME

On se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On note $I\!R$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Le point de coordonnées (x,y) est caractérisé par son affixe, le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$.

Soient u et v deux nombres complexes et $f_{u,v}$ l'application de l'ensemble $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui, à tout nombre complexe z, associe le nombre complexe z' tel que $z' = u\,z + v\,\bar{z}$.

On note $F_{u,v}$ l'application du plan $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' égale à $f_{u,v}(z)$.

PARTIE I

Les trois questions sont indépendantes.

1- Soient α et β deux nombres réels vérifiant $0 < \beta < \alpha\sqrt{3}$.

Soient M, N, P les points du plan $\mathscr{P}$ d'affixes respectives 2α, $-\alpha + i\beta$, $-\alpha - i\beta$.
On désigne par *M'*, *N'*, *P'* les milieux respectifs des segments $[NP], [PM], [MN]$.
On considère l'ellipse (*e*) admettant comme système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = \alpha\cos t \\ y = \dfrac{\beta}{\sqrt{3}}\sin t \end{cases} \quad t \in I\!R.$$

a. Préciser le centre de l'ellipse (e) et vérifier qu'elle passe par les points *M'*, *N'*, *P'*.

b. Démontrer que les tangentes respectives à l'ellipse (*e*) aux points *M'*, *N'*, *P'* sont les côtés du triangle *MNP*.

c. En prenant $\alpha = 2$ et $\beta = \sqrt{3}$, construire le triangle *MNP* et l'ellipse (*e*) correspondante.

2- On suppose que $u \neq 0$ et $v \neq 0$ et $|u| \neq |v|$.

Soit $u = \rho\, e^{i\omega}$ et $v = \rho'\, e^{i\omega'}$, les expressions de u et v sous forme trigonométrique où ρ, ρ' sont des nombres réels strictement positifs et ω, ω' appartiennent à l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

On considère l'ensemble $E_{u,v}$ des points M du plan $\mathscr{P}$ dont les affixes Z vérifient $Z = u\,e^{it} + v\,e^{-it}$, où t décrit l'ensemble des nombres réels.

a. On suppose que $\omega = 0$ et $\omega' = 0$. Démontrer que l'ensemble $E_{\rho,\rho'}$ ainsi obtenu est une ellipse dont on déterminera le centre et les sommets.

b. On suppose que $\omega = \omega'$. Démontrer que l'ensemble $E_{u,v}$ se déduit de $E_{\rho,\rho'}$ par une rotation de centre O dont on déterminera l'angle. En déduire la nature de $E_{u,v}$.

c. On suppose que $\omega \neq \omega'$. Déterminer deux nombres θ et φ tels que $\omega = \theta + \varphi$ et $\omega' = \theta - \varphi$. En utilisant les résultats du *b*, déterminer la nature de $E_{u,v}$.

3- **Etude de $f_{u,v}$ et de $F_{u,v}$.**

a. Démontrer que pour tout nombre λ réel et pour tous nombres complexes z_1 et z_2,

$$f_{u,v}[\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2] = \lambda f_{u,v}(z_1) + (1-\lambda) f_{u,v}(z_2).$$

En déduire les images respectives par l'application $F_{u,v}$, d'une droite, du milieu d'un segment.

b. Démontrer que l'application $F_{u,v}$ est bijective si et seulement si $|u| \neq |v|$.

PARTIE II

Soit $j = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

On rappelle le résultat suivant :

Soient trois points M, N, P d'affixes respectives n, m, p, admettant O comme isobarycentre. Le triangle MNP est équilatéral si et seulement si $n = mj$ *ou* $n = mj^2$.

Soient K, I, J les points d'affixes respectives $1, j, j^2$.

1- Déterminer l'isobarycentre des points K, I, J et vérifier que le triangle KIJ est équilatéral.

2- Soient trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c, admettant O comme isobarycentre.
On suppose que les points A, B, C sont non alignés et que le triangle ABC n'est pas équilatéral.

a. Démontrer qu'il existe une unique application $F_{u,v}$ telle que $F_{u,v}(K) = A$, $F_{u,v}(I) = B$.

Déterminer u et v en fonction de a, b et j. En déduire que $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

Quelle est l'image du point J par l'application $F_{u,v}$ ainsi obtenue ?

b. Vérifier que $a\overline{b} - \overline{a}b \neq 0$.

Exprimer $u\overline{u} - v\overline{v}$ en fonction de a et b.

c. Démontrer que l'application $F_{u,v}$ est bijective.

3- On admet que le cercle inscrit du triangle KIJ est le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon $\dfrac{1}{2}$, et que les points de contacts sont les milieux des cotés du triangle KIJ.

a. En utilisant les résultats de la question 2 de la partie I, démontrer que l'image du cercle $\mathscr{C}$ par l'application $F_{u,v}$ est une ellipse E dont on précisera le centre.

b. Vérifier que les milieux des côtés du triangle ABC appartiennent à l'ellipse E.

c. Démontrer que l'ellipse E est tangente aux trois côtés du triangle ABC. On pourra effectuer un raisonnement par l'absurde en utilisant la bijectivité de l'application $F_{u,v}$.

4- En utilisant les résultats précédents, retrouver les conclusions de la question 1*a* et 1*b* de la partie I.

DEUXIÈME PROBLÈME

PARTIE I

1- On définit la fonction h sur l'intervalle $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x)=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $h(0)=0$.

a. Rappeler un développement limité au voisinage de zéro à l'ordre 3 de la fonction sinus.

b. Démontrer que la fonction h est continue, puis dérivable sur l'intervalle $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

c. Si h' désigne la fonction dérivée de la fonction h, démontrer que h' est continue sur l'intervalle $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

d. On définit la fonction k sur l'intervalle $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $k(x)=\dfrac{x}{\sin x}$ si $x\neq 0$ et $k(0)=1$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, exprimer $k(x)$ en fonction de x et de $h(x)$.

En déduire simplement que la fonction k est dérivable sur l'intervalle $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ et que sa dérivée est continue sur l'intervalle $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

2- Si φ désigne une fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ dérivable sur l'intervalle $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, à dérivée continue sur l'intervalle $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$, démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $\lim\limits_{n\to+\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi(x)\sin(nx)\,dx=0$.

PARTIE II

1-

a. Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ est convergente.

b. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$. On pourra utiliser une intégration par parties.

2- Soit n un nombre entier non nul.

Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)=\frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x}.$$

3- Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx$.

a. Vérifier que I_n est convergente.

b. Calculer I_n .

c. Démontrer que

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\sin[(2n+1)x]\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{x} dx$ où h est la fonction définie dans la partie I.

d. Démontrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{x} dx = \int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx$ et en déduire la valeur de

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

PARTIE III

J_n désigne l'intégrale définie par $J_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx$

1-

a. Vérifier que J_n est convergente.

b. Démontrer que $J_n = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. On pourra utiliser les résultats de la question 2 de la partie II.

2-

a. Démontrer que $J_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[x^2 + (\pi - x)^2\right] \frac{\sin[(2n+1)x]}{\sin x} dx$.

b. Démontrer que $J_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2(x-\pi)k(x) + \pi^2 h(x)\right] \sin[(2n+1)x]\,dx + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)x]}{x}\, dx$,

où *k* et *h* sont les fonctions définies dans la partie I.

c. En utilisant les résultats de la partie I, démontrer que $\lim_{n \to +\alpha} J_n = \pi\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

d. En déduire $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.